

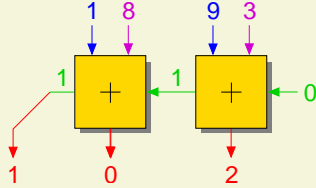
ADDITION DANS LES PUCES ÉLECTRONIQUES

CLAUDE-PIERRE JEANNEROD & ARNAUD TISSERAND

1 Addition « à la main » de deux nombres décimaux

Pour calculer la somme de deux nombres – par exemple 19 et 83 –, on commence par additionner les chiffres des unités, puis ceux des dizaines, etc., tout en propageant les retenues de la droite vers la gauche.

On peut donc représenter la somme $\begin{matrix} 19 \\ + 83 \\ \hline 102 \end{matrix}$ par le schéma suivant :



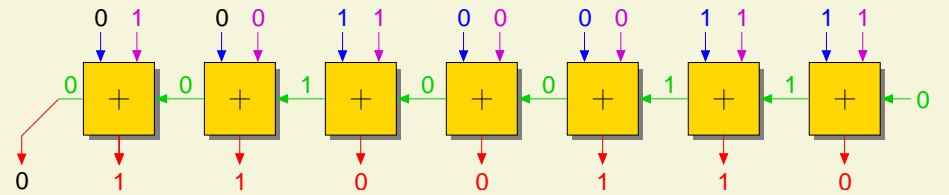
À partir de deux chiffres des entrées et d'une retenue, chaque cellule calcule un chiffre de somme et une retenue sortante (propagée à la cellule suivante).

Il y a autant de cellules que de chiffres dans la plus grande des entrées.

6 Addition dans une puce de deux nombres binaires

En base 2 les nombres 19 et 83 s'écrivent 10011 et 1010011. On calcule aussi la somme en commençant par les deux chiffres le plus à droite et en propageant les retenues vers la gauche.

La somme $\begin{matrix} 10011 \\ + 1010011 \\ \hline 1100110 \end{matrix}$ s'effectue alors selon le schéma suivant :



On pourra vérifier que 1100110 est bien l'écriture en base 2 de 102.

Il y a plus de cellules mais elles sont beaucoup plus simples (c.f. 3).

2 Représentation décimale des nombres

En décimal ou base 10, tous les chiffres d'un nombre sont compris entre 0 et 9.

Tout nombre compris entre 0 et 999 s'écrit de façon unique

$$D = d_2 \times 100 + d_1 \times 10 + d_0 \times 1$$

Le chiffre des centaines est d_2 , celui des dizaines d_1 , celui des unités d_0 .

7 Représentation binaire des nombres

En binaire ou base 2, tous les chiffres d'un nombre valent 0 ou 1.

Tout nombre compris entre 0 et 255 s'écrit de façon unique

$$B = b_7 \times 128 + b_6 \times 64 + b_5 \times 32 + b_4 \times 16 + b_3 \times 8 + b_2 \times 4 + b_1 \times 2 + b_0 \times 1$$

3 Les tables d'addition en base 10

Chaque table donne, pour un chiffre a , le résultat de $a+b$ pour tous les chiffres possibles b (0, 1, 2, 3, ..., 8, 9). On a donc 10 tables de 10 lignes chacune :

0+0=0	1+0=1	2+0=2	...	9+0=9
0+1=1	1+1=2	2+1=3		9+1=10
0+2=2	1+2=3	2+2=4		9+2=11
0+3=3	1+3=4	2+3=5		9+3=12
0+4=4	1+4=5	2+4=6		9+4=13
0+5=5	1+5=6	2+5=7		9+5=14
0+6=6	1+6=7	2+6=8		9+6=15
0+7=7	1+7=8	2+7=9		9+7=16
0+8=8	1+8=9	2+8=10		9+8=17
0+9=9	1+9=10	2+9=11		9+9=18

Pour traiter les cas où la retenue vaut 1, il faut 10 tables supplémentaires !

On lira en particulier $1+8+1=10$ dans une de ces tables.

8 Les tables d'addition en base 2

En base 2, il n'y a que 2 tables d'addition possibles et chacune n'a que 2 lignes.

0+0=0	1+0=1
0+1=1	1+1=10

Pour traiter les cas où la retenue vaut 1, il faut 2 tables supplémentaires.

0+0+1=1	1+0+1=10
0+1+1=10	1+1+1=11

9 Quelques particularités de la représentation binaire

- Quel est le plus grand nombre représentable avec 8 bits ?

$255 = 128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ s'écrit 11111111 en base 2

- Comment savoir si un nombre est pair ou impair ?

il est pair si et seulement si $b_0 = 0$

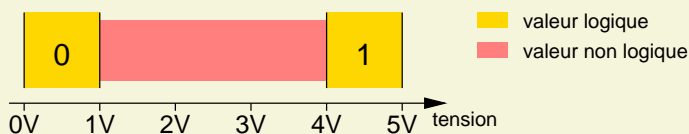
- Combien de nombres peut-on représenter avec x chiffres ?

x	0	1	2	3	4	5	6	7
2^x	1	2	4	8	16	32	64	128
10^x	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000

Les puissances de 10 croissent beaucoup plus vite que celles de 2.

4 Les puces électroniques ne savent compter qu'en binaire

Pour aller très vite, les circuits électroniques utilisent la représentation binaire ou base 2. Les chiffres binaires — BITS pour Binary digITs — sont 0 et 1.

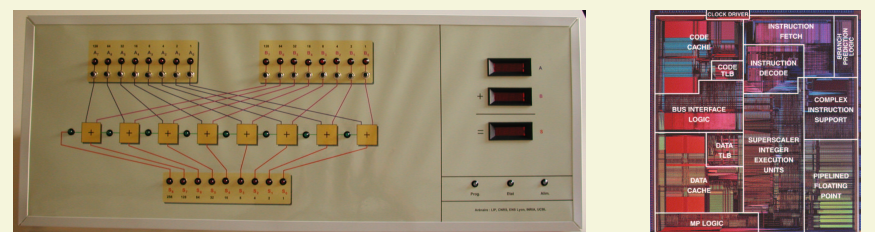


5 Exemples de représentation binaire des nombres

0		$0 \times 1 = 0$	
1		$1 \times 1 = 1$	
10		$1 \times 2 + 0 \times 1 = 2$	
11		$1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$	
100		$1 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = 4$	
101		$1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 = 5$	
...	
10011		$1 \times 16 + 0 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 19$	
1010011		$1 \times 64 + 0 \times 32 + 1 \times 16 + 0 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 83$	
...	
1100110		$1 \times 64 + 1 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 102$	

On dit que, par exemple, 10011 est le représentant (unique) de 19 en base 2.

10 Des machines à additionner



Un processeur actuel peut effectuer 3 milliards d'additions en 1 seconde !