I.U.P. Lorient
Maîtrise GEII **Emmanuel Boutillon**

Travaux Pratiques de théorie des signaux aléatoires
Processus Aléatoires

Ce TP est divisé en deux parties concernant respectivement l'étude d'un bruit blanc gaussien et l'analyse de processus ARMA. La partie théorique doit être préparée avant le jour du TP. Elle sera incluse au compte-rendu du TP.

Analyse théorique (à préparer avant le TP)

Les trois filtres suivants :

$H_{AR}(z) = 1/(1- 8/5.\cos(\pi/6).z^{-1} + 16/25.z^{-2})$
$H_{MA}(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$
$H_{ARMA}(z) = H_{AR}(z)*H_{MA}(z)$

sont excités par un bruit blanc gaussien W(k) de variance $\sigma_w^2 = 1$. On appelle $X_{AR}(k)$, $X_{MA}(k)$, $X_{ARMA}(k)$ les trois processus aléatoires en sortie des trois filtres.

<u>Question 1</u> : Quels sont les zéros z_0 et z_0^* de $H_{MA}(z)$?

<u>Question 2</u> : Quelle est la réponse impulsionnelle de $H_{MA}(z)$?

<u>Question 3</u> : Déterminer l'expression de la fonction d'autocorrélation $R_{XMA}(\tau)$ du p.a. X_{MA}.

<u>Question 4</u> : Quels sont les pôles p_0 et p_0^* de $H_{AR}(z)$?

<u>Question 5</u> : En écrivant $H_{AR}(z)$ sous la forme $H_{AR}(z) = \dfrac{a}{1 - z^{-1} \cdot p_0} + \dfrac{b}{1 - z^{-1} \cdot p_0^*}$ avec *a* et *b* deux constantes, déterminer la réponse impulsionnelle de H(z).

<u>Question 6</u> : Déterminer l'expression de la fonction d'autocorrélation $R_{XAR}(\tau)$ du p.a. X_{AR}.

<u>Question 7</u> : A partir des fonctions de transfert $H_{AR}(z)$, $H_{MA}(z)$ et $H_{ARMA}(z)$, donner les expressions des densités spectrales de puissance $S_{XAR}(f)$, $S_{XMA}(f)$ et $S_{XARMA}(f)$ des p.a. X_{MA}, X_{AR} et X_{ARMA}.

Remarques préliminaires :

a) Toutes les questions du TP sont relatives aux trois filtres. On désignera par W le bruit blanc d'entrée du filtre (AR, MA et ARMA) et X la sortie du filtre (X_{MA}, X_{AR} et X_{ARMA}).

b) Les fonctions indiquées en italique dans le texte correspondent à des fichiers Matlab prédéfinis se trouvant dans le répertoire TP2_pa. Vous pouvez taper help nom_commande pour en savoir plus, ou mieux, lire directement les fichiers pour comprendre la nature des calculs effectués.

Première partie : Densité spectrale de puissance

Courbes théoriques : A l'aide de la fonction *dsp_theorique*, tracer la d.s.p. théorique de X.

Courbes expérimentales : Tracer expérimentalement la d.s.p. de X en utilisant la fonction *periodigramme* (voir annexe). Le nombre de points utilisé pour déterminer le périodigramme sera de 256. Pour obtenir le périodigramme moyen, il faut effectuer la moyenne d'un nombre important de périodigrammes. Pour obtenir simplement N périodigrammes, vous pouvez compléter la séquence d'instructions suivante :

```
W = wgn(N*256);    %Generation d'une sequence de longueur N*256 d'un bruit blanc gaussien (white gaussian noise).
X = AR(W, -8*cos(pi/6)/5, 16/25);   %filtrage de la sequence par le filtre AR
for i=1:128
  Perio(i) = 0;
end;
for i = 1:N
         X_i = X( (i-1)*256 +1 : i*256); % Extraction vecteur;
        [f, perio_ i] = periodigramme(X_i);
        perio = perio + perio_i ;
end;
perio = perio/N;
plot(f, perio);
```

Que concluez-vous ?

Deuxième partie : intercorrélation entrée-sortie

Courbes théoriques : En utilisant la suite impulsion E (E(1) = 1, E(k) = 0 pour k= 2..32), tracer la réponse impulsionnelle des trois filtres (sur 32 valeurs). Quelle est la relation entre cette courbe et la fonction d'intercorrélation "entrées-sortie" $R_{WX}(\tau)$.

Courbes expérimentales : Tracer sur la même figure l'entrée W et la sortie X (il faut pour cela utiliser la commande *hold* (plot(w); hold; plot(x,'r') %couleur rouge)). Qu'observez-vous ?

Déterminer expérimentalement les 32 premières valeurs de la fonction d'intercorrélation et comparer la courbe expérimentale avec la courbe théorique. Que concluez-vous ?

```
N = length(X) – 16; Wr = W(1:N);
for tau=1:16
        Xr  = X(tau : tau+N-1);
        figure(tau);
        plot(Wr, Xr);
        Rwx(tau) = correlation(Wr, Xr);
end;
```

<u>Troisième partie : autocorrélation du p.a. de sortie</u>

<u>Courbes théoriques</u> : On cherche à tracer la fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$. du p.a. X. Pour cela, on va utiliser deux méthodes différentes.

Méthode directe : on utilise le fait que $R_X(\tau) = h(k)*h(-k)* R_W(\tau)$, avec h(k) la réponse impulsionnelle du filtre (prendre les 32 premiers coefficients). Ce calcul s'effectue en deux étapes :

- obtenir la fonction retournée hr(k) = h(k) en utilisant les lignes suivantes :

```
for i=1:32
        hr(k) = h(32+1-k);
end;
```

- déterminer R_X = conv(h, hr) ; avec conv, fonction de convolution.

Tracer la courbe $R_X(\tau)$ (remarque : sur l'axe des x, la valeur 32 correspond à $\tau = 0$).

Méthode fréquentielle : on utilise le fait que $R_X(\tau) = TF^{-1}(S_X(f))$. Pour effectuer ce calcul, il faut déterminer la dsp complète (fréquence normalisée entre 0 et 1) de $S_X(f)$. De plus, suite aux erreurs de calcul, le résultat n'est pas purement réel. Il faut effectuer la sequence d'instructions suivante :

```
 [f, dsp] = dsp_theorique_c(a1,a2,b1,b2);
Rx   = ifft(dsp);
Rx = real(Rx);
```

Comparer l'allure des deux courbes.

<u>Courbes expérimentales</u> : Déterminer expérimentalement les 32 premières valeurs de la fonction d'autocorrélation de X. Comparer la courbe expérimentale avec la courbe théorique.

<u>Quatrième partie : intercorrélation des sorties des filtres</u>

<u>Courbes expérimentales</u> : Tracer sur la même courbe les deux p.a. X_{MA}, X_{AR} générés à partir de la même séquence W. Qu'observez-vous ?

Effectuer les mêmes études théoriques et expérimentales que la troisième partie pour déterminer les fonctions d'intercorrélation $R_{X_{MA}X_{AR}}$ des sorties des deux filtres.
