I.U.P. Lorient
Maîtrise GEII **Emmanuel Boutillon**

Travaux Dirigés de signal n°2
Variable Aléatoire

Exercice n°1 : Montrer pour la covariance C_{XY} des v.a. X et Y vérifient l'égalité suivante :

$$C_{XY} = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}[X])(Y-\mathrm{E}[Y])] = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}[X]\mathrm{E}[Y]$$

Exercice n°2 : Soit Φ une v.a. uniformément distribuée sur $[0, \pi]$ et soient X et Y définis par $X = \cos(\Phi)$ et $Y = \sin(\Phi)$.

Question 1 : Montrer que X et Y ont une covariance nulle.

Question 2 : Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice n°2 : Soit X une v.a. uniformément distribuée entre [0,1], soit x_1 et x_2 deux réalisations indépendantes de X et soit $y = x_1 + x_2$ leur somme.

Question 1 : Déterminer la densité de probabilité $p_Y(y)$ de la v.a. Y.

Question 2 : Exprimer $p_Y(y)$ en fonction de $p_{X1}(x_1)$ et $p_{X2}(x_2)$ dans le cas général.

Exercice n°4 : Soit X et Y deux v.a. conjointement gaussiennes avec

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] = 0$$
$$\mathrm{VAR}[X] = \mathrm{VAR}[Y] = 1$$
$$r_{XY} = \rho$$

Question 1 : Montrer que $p_X(x) = \mathrm{N}(0,1)$ et $p_y(y) = \mathrm{N}(0,1)$

Question 2 : Déterminer $p(y|x)$.

Question 3 : Si $\rho = 0$, que peut-on dire des variables X et Y ?

Exercice n°5 : Soit X et Y deux v.a. Déterminer en fonction de m_X, m_Y, σ_X^2, σ_Y^2 et de $\mathrm{E}[XY]$ les valeurs de a et de b qui minimise l'expression :

$$\mathrm{E}[(X - a.Y - b)^2]$$

---

i	P(X<i)	
0	0,60653066	0,36787944
1	0,90979599	0,73575888
2	0,98561232	0,9196986
3	0,99824838	0,98101184
4	0,99982788	0,99634015
5	0,99998584	0,99940582
6	0,999999	0,99991676
7	0,99999994	0,99998975