
Travaux Dirigés de signal n°1
Probabilités, Variable Aléatoire

Exercice n° 1 :

Trois usines fabriquent des pièces de même nature.

Dans l'usine 1, 1 % des pièces sont défectueuses.

Dans l'usine 2, 8 % des pièces sont défectueuses.

Dans l'usine 3, 3 % des pièces sont défectueuses.

Un lot de 1000 pièces est constitué de 500 pièces provenant de l'usine 1, de 200 pièces provenant de l'usine 2 et de 300 pièces provenant de l'usine 3.

Question 1 : Quel est, en moyenne, le pourcentage de pièces défectueuses dans chaque lot ?

Question 2 : On prend une pièce d'un lot au hasard : celle-ci est défectueuse. Quelles sont les probabilités p_1 , p_2 et p_3 que la pièce provienne de l'usine 1, 2 et 3 ?

Exercice n° 2 :

Une usine fabrique des moteurs électriques. La fabrication de chaque moteur s'effectue en trois étapes sur trois machines différentes. L'expérience a montré que, lorsque le moteur a un défaut de fabrication, le problème provient, dans 10% des cas, de la machine 1, dans 30% des cas, de la machine 2 et enfin, dans 60% des cas, de la machine 3.

Les temps moyens d'intervention (diagnostique et éventuellement, réparation de la panne) sur les machines 1, 2 et 3 sont respectivement de 20 mn, 10 mn et 30 mn.

Un premier technicien commence toujours par rechercher la panne dans la première machine. S'il ne détecte aucune anomalie, il continue par la deuxième machine 2, puis éventuellement, termine par la troisième machine.

Question 1 : Quelle est la durée moyenne de son intervention ?

Un deuxième technicien choisit toujours au hasard l'ordre de ses interventions.

Question 2 : Quelle est la durée moyenne de son intervention ?

Question 3 : Déterminer le plan d'intervention qui minimise la durée moyenne de réparation.

Exercice n°3 : Un test de paludisme est positif dans 99 % des cas si le patient est infecté, 3 % des cas si le patient est non infecté.

Une campagne de dépistage du paludisme est effectuée dans une population dans laquelle 10 % des personnes sont infectées.

Question 1 : Quelle est la probabilité d'être effectivement atteint si le test est positif ?

Question 2 : Quelle est la probabilité d'être atteint si le test est négatif ?

Exercice n°4 : Soit X une v.a. qui se réalise dans un ensemble à deux valeurs $\{a, b\}$, avec $P(X=a) = p$ et $P(X=b) = 1-p$ ($0 \leq p \leq 1$). Calculer l'espérance et la variance de cette v.a. (il s'agit de la distribution binaire ou encore, distribution de Bernoulli).

Exercice n°5 : Soit X une v.a. uniformément répartie sur le segment $[a, b]$. Calculer l'espérance et la variance de cette v.a.

Exercice n°6 : Une compagnie d'assurance maritime assure 500 navires, chacun d'une valeur de 20 MF. La probabilité d'un naufrage, sur une année, est de $1/500$.

Question 1 : Trouver la loi de probabilité donnant le nombre de naufrage par année.

Question 2 : Quelle doit être la trésorerie de la compagnie d'assurance pour qu'elle puisse honorer ses contrat dans 99.8 % des cas.

Question 3 : Quelle doit être la nouvelle trésorerie si cette compagnie fusionne avec une compagnie d'assurance de même taille (soit 1000 bateaux assurés).

Loi de poisson	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$P(X=2)$	$P(X=3)$	$P(X=4)$	$P(X=5)$
$\lambda=1$	0,607	0,303	0,076	0,013	0,002	0,000
$\lambda=2$	0,368	0,368	0,184	0,061	0,015	0,003

Exercice n°7 : Soit Φ une v.a. uniformément distribuée entre $[0, \pi]$, on s'intéresse à la v.a. $X = \cos(\Phi)$.

Question 1 : déterminer l'espérance $E[X]$ et la variance $VAR[X]$ de la v.a. X .

Question 2 : pour $x < -1$, $x > 1$ et enfin $x \in [-1, 1]$ déterminer la fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$ en fonction de $\phi = \arccos(x)$.

Question 3 : En déduire l'expression de la densité de probabilité de X .

Question 4 : Soit X la mesure à un instant donné d'un signal sinusoïdale d'amplitude 1 dont on ne connaît pas la phase. Quelle est la d.d.p. de la v.a. X ?
