Maîtrise GEII

Notes de cours d'automatique

Emmanuel BOUTILLON

janvier 2004

IUP de Lorient, Université de Bretagne Sud
2, rue Le Coat St-Haouen, 56325 Lorient cedex
Tél. 02 97 88 05 50 – Fax. 02 97 88 05 51

Table des matières

Le but de la théorie des systèmes asservis est de commander un système physique en respectant un cahier des charges spécifiant les contraintes de stabilité, de vitesse et précision.

Ce cours aborde les méthodes d'asservissement par retour d'état.

IMPORTANT : Tous les points vus en cours ne sont pas nécessairement repris dans ce document.

I. Notion d'état d'un système

Définition : le vecteur d'état $X(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))^T$ représente l'état d'un système si et seulement si à chaque instant t_0, $X(t_0)$ « résume » tout le passé du système. Ainsi, à partir de $X(t_0)$ et de la connaissance des e entrées $U(t) = (u_1(t), u_2(t), ..., u_e(t))^T$ entre les instants t_0 et t, il est possible de déterminer de façon univoque $X(t)$.

I.1. Equations d'états

Le système est caractérisé par un système d'équation différentielle matricielle du premier ordre :

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t) \end{cases}$$

On a les définitions suivantes :

$X(t)$: vecteur d'état de dimension $(n,1)$
$U(t)$: vecteur de commande ou d'entrée $(e,1)$
$Y(t)$: vecteur d'observation ou sortie $(s,1)$.
A : matrice d'évolution libre du système (n,n)
B : matrice d'application de la commande (n,e)
C : matrice d'observation du système (s, n)
D : matrice de transmission directe de la commande (s,e).

Par exemple, le système suivant donne les différents paramètres d'un système pour lequel e=2, n=4 et s=3.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

I.2. Changement de base

Les n variables d'états ne sont pas uniques : il existe d'autres vecteurs d'états, parfois plus pratique à manipuler.

<u>Théorème</u> : Si X est un vecteur d'état, alors $\overline{X} = T^{-1}X$, ou T est une matrice (n,n) régulière ($\det(T) \neq 0$, ou encore T^{-1}existe et $TT^{-1} = T^{-1}T = Id$) est lui aussi un vecteur d'état du système.

Les nouvelles équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \overline{X}' = \overline{A}\,\overline{X} + \overline{B}U \\ Y = \overline{C}\,\overline{X} + \overline{D}U \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \overline{A} = T^{-1}AT \\ \overline{B} = T^{-1}B \\ \overline{C} = CT \\ \overline{D} = D \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : on considère le système initial :

$$\begin{cases} X' = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

soit en multipliant la première équation par T^{-1} et en remplaçant X par $X = T \cdot T^{-1}X = T \cdot (T^{-1}X) = T\overline{X}$, on obtient :

$$\begin{cases} q\overline{X} = T^{-1}AT\overline{X} + T^{-1}BU \\ Y = CT\overline{X} + DU \end{cases}$$

II. Solution des équations d'états

II.1. Définition de e^{At}.

<u>Définition</u> : on appelle e^A l'exponentielle de la matrice A défini par :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

On en déduit que e^{At} définit une matrice dont les éléments sont fonctions du temps avec :

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

La matrice e^{At} étant une fonction du temps, il est possible de définir sa dérivée.

<u>Dérivé de e^{At}</u>

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{A^k t^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = Ae^{At}$$

On en déduit que $e^{At}.X_0$ est solution de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$ ayant comme condition initiale $X(t{=}0)= X_0$ (il s'agit, en fait, de la généralisation du cas monodimensionel dans lequel l'équation différentielle $x'(t) = ax(t)$ admet la solution $x(t) = x_0 e^{at}$).

<u>Propriétés de $\Phi(t)=e^{At}$</u>

$$\Phi(0) = Id$$
$$\Phi'(t) = A\Phi(t) = \Phi(t)A$$
$$\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$$
$$\Phi(t_1 - t_0)^{-1} = \Phi(t_0 - t_1)$$

La matrice $\Phi(t - t_0)$ est appelée la matrice de transition entre t et t_0.

II.2. Calcul de $\Phi(t)=e^{At}$

Il existe plusieurs méthode pour calculer l'exponentielle d'une matrice : utiliser la forme diagonalisable ou à défaut, de Jordan, décomposition de la matrice en élément simple

a) Forme diagonalisable et forme de Jordan

Si A est une matrice diagonale $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & \lambda_n\end{bmatrix}$, alors

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & 0 & ... & 0\\ 0 & e^{\lambda_2 t} & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}.$$

Si A est une matrice Jordan $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0\\ 0 & 0 & \lambda & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & 1\\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda\end{bmatrix}$, alors

$$e^{At}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!} & ... & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\\ 0 & 1 & t & ... & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\\ 0 & 0 & 1 & ... & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & 1\end{bmatrix}.$$

b) Décomposition de la matrice en somme d'éléments simples

Propriété : si $A = B + C$, alors $e^{At}=e^{Bt}e^{Ct}$

application : On considère la matrice $A=\begin{bmatrix}\lambda & \omega\\ -\omega & \lambda\end{bmatrix}=B+C$ avec $B=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$ et $C=\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}$.

On a $e^{Bt}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & 0\\ 0 & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$ et $e^{Ct}=\begin{bmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{bmatrix}$(voir TD 1)

On a donc $e^{At}=e^{\lambda t}\begin{bmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{bmatrix}$

Exercice : utiliser cette propriété pour calculer l'exponentiel d'une matrice de Jordan.

c) Changement de base

Il est parfois plus facile de changer de base pour calculer l'exponentiel d'une matrice. Soit T la matrice de passage, on a :

$$\overline{A} = T^{-1}AT$$

alors

$$e^{At} = Te^{\overline{A}t}T^{-1}$$

En particulier, si A est diagonalisable, on calcule e^{At} en passant par la forme diagonale :

$$\overline{A} = \Delta = diag(\lambda_1,...,\lambda_n).$$

Si A n'est pas diagonalisable, on utilise alors la forme de Jordan.

II.3. Transformée de Laplace de $\Phi(t)= e^{At}$

L'opérateur de dérivation revient à multiplier par l'opérateur p dans le cas monodimensionel. On peut généraliser pour les matrices.

$$X(t) = e^{At} \Rightarrow X'(t) = AX(t) \Rightarrow pX(p) - X_0 = AX(p)$$

On a donc :

$$X(p)(p \cdot Id - A) = X_0 \text{ avec } X_0 = X(0) = e^0 = Id$$

soit :

$$X(p) = (p \cdot Id - A)^{-1}$$

Remarque : dans le cas monodimensionel, on a $L(e^{at}) = \dfrac{1}{p-a}$

Exemple : Si $A = \begin{bmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{bmatrix}$, on a alors :

$$(p \cdot Id - A)^{-1} = \begin{bmatrix} p-\lambda & \omega \\ -\omega & p-\lambda \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}\begin{bmatrix} p-\lambda & -\omega \\ \omega & p-\lambda \end{bmatrix}$$

II.4. Stabilité

Par définition, le système est stable si et seulement si la matrice d'évolution libre A vérifie $e^{At} \to 0$ quant $t \to \infty$.

Théorème : le système est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A (les racines de det(pI-A)) sont à parties réelles strictement négatives.

II.5. Résolution de l'équation différentielle

On montre que l'équation différentielle :

$$X'(t) = AX(t) + BU(t)$$

admet une solution entre les instants t_0 et t qui se décompose en une somme de deux fonctions : la réponse libre X_l ne dépendant que des conditions initiales X_0 à l'instant t_0 et une réponse forcée X_f ne dépendant que l'entrée $U(t)$ du système :

$$X(t) = X_l(t) + X_f(t)$$

La réponse libre est la solution de l'équation différentielle d'évolution libre : $X'_l(t) = AX_l(t)$ ayant comme condition initiale $X_l(t_0) = X_0$. Elle s'exprime par :

$$X_l(t) = e^{A(t-t_0)} X_0$$

La réponse forcée est solution de l'équation différentielle $X_f'(t) = AX_f(t) + BU(t)$ ayant comme condition initiale $X'_f(t_0) = 0$. Elle s'exprime par :

$$X_f(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A\tau} BU(t-\tau) d\tau$$

La réponse forcée correspond à la convolution entre l'entrée du système et la réponse impulsionnelle du système.

Il est commode de définir les réponses libres et forcées du système en termes de modes. Pour simplifier, on se place dans le cas ou la matrice A est diagonalisable.

a) Réponse libre

On considère la base $T = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ des vecteurs propres de la matrice A. Dans cette base, la matrice $A = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est diagonale. En effet, pour tout k entre 1 et n, on a : $A \cdot \sigma_k = \lambda_k \sigma_k$.

On vérifie que $F_k(t) = e^{\lambda_k (t-t_0)} \sigma_k$ est solution de l'équation d'évolution libre $X'_l(t) = AX_l(t)$.
Soit $(c_1, c_2, ... c_n)$ les coordonnées de X_0 dans la base T[1], alors la réponse libre s'écrit :

[1] soit $X_0 = \sum_{k=1}^{n} c_k \sigma_k$ ou encore, en posant $C = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$, $X_0 = T \cdot C \Leftrightarrow C = T^{-1}.X_0$

$$X_l(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda(t-t_0)} \sigma_k$$

Les vecteurs propres correspondent aux modes d'excitations du système. Ils peuvent être excités indépendamment les uns des autres en fonction des conditions initiales.

b) Réponse forcée

De même que pour la réponse libre, il est possible de décomposer l'application de la commande $BU(t-\tau)$ sur la base T. On écrit alors :

$$BU(\tau - t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(\tau - t)\sigma_k$$

La réponse forcée s'écrit alors selon les modes du système par :

$$X_f(t) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{t_0}^{t} c_k(\tau - t)e^{\lambda\tau}d\tau\right)\sigma_k$$

De nouveau, les modes sont découplés et excités indépendamment les uns des autres. Cette fois-ci, par l'intermédiaire du produit entre la matrice d'application de la commande et la commande elle même. Il est donc possible qu'un, ou plusieurs modes, ne dépendent pas de l'entrée : on dit qu'ils sont non contrôlable (ou non gouvernable).

c) Calcul de la sortie

Elle se décompose elle aussi en terme de sortie libre et sortie forcées mais elle est obtenue par l'intermédiaire de la matrice C d'observation de l'état.

Il est possible, en fonction de C, que des modes existant dans $X(t)$ n'apparaissent pas dans la sortie ($C \cdot \sigma_k = 0$). Ces modes sont dits non-observables.

III. Conversion état transfert

Il est possible de passer d'une représentation « modèle d'état » d'un système automatique, à sa représentation « fonction de transfert », et réciproquement.

III.1. Conversion transfert-état

a) Blocs du premier ordre

Si un diagramme représentatif de transferts interconnectés ne comporte que des intégrateurs et des blocs du premier ordre, on prend, comme vecteur d'état, la sortie de chaque bloc.

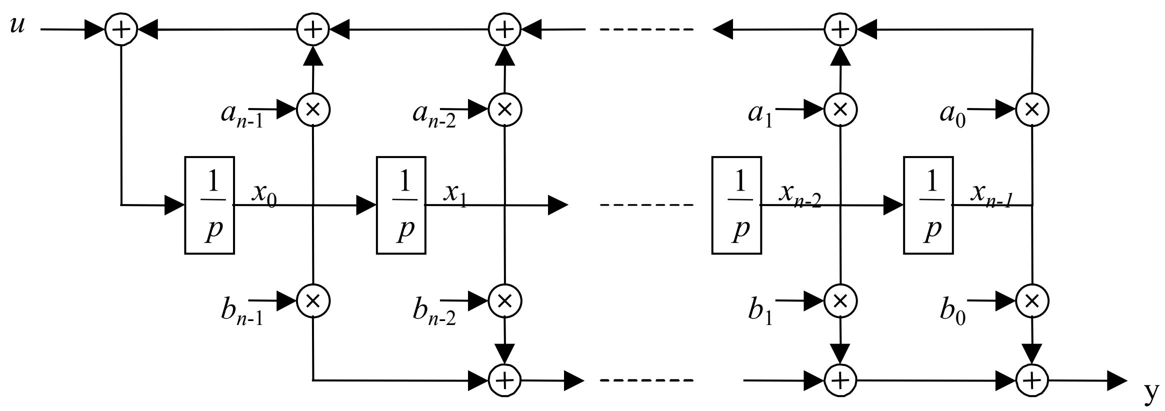
b) Fonction de transfert $\rightarrow$ forme commandable

On considère un système de fonction de transfert

$$H(p) = \frac{b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \ldots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \ldots + a_1 p + a_0}$$

Soit $Y(p)=H(p)U(p)$

Montrons que le schéma suivant correspond à la même fonction de transfert



En effet, on a, par récurrence,

$$px_1 = x_0, \quad p^2 x_2 = x_0, \quad p^{n-1}x_{n-1} = x_0$$

Le premier intégrateur de la chaîne nous donne donc la relation :

$$x_0 = \frac{1}{p}(u - a_{n-1}x_0 - a_{n-2}x_1 \ldots - a_1 x_{n-2} - a_0 x_{n-1})$$

Ou encore, en combinant les deux dernières équations :

$$p^n x_{n-1} = u - a_{n-1}p^{n-1}x_{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}x_{n-1} \ldots - a_1 p x_{n-1} - a_0 x_{n-1})$$

soit :

$$x_{n-1} = \frac{u}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \ldots = a_1 p + a_0}$$

En rappelant que :

$$px_1 = x_0, \quad p^2 x_2 = x_0, \quad p^{n-1}x_{n-1} = x_0,$$

on obtient :

$$y(p) = b_{n-1}x_{n-1} + \ldots b_1 x_1 + b_0 x_0 = \frac{b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \ldots + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \ldots + a_1 p + a_0} u$$

On retrouve bien la fonction de transfert. On en déduit la forme canonique de commandabilité :

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 \end{bmatrix}, \; D = [0]$$

Il est possible, en choisissant un changement de variable plus complexe, d'obtenir la forme canonique d'observabilité :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{n-1} & y_n \end{bmatrix}, \; D = [0]$$

avec les y_i représentant les n premiers termes de la réponse impulsionnelle du système.

En pratique, nous verrons que la forme d'observabilité est une forme intermédiaire que l'on utilise pour déterminer la forme de commandabilité.

III.2. Conversion état $\rightarrow$ transfert

a) Méthode par transformée de Laplace

En utilisant la transformée de Laplace, l'équation d'état devient :

$$\begin{cases} pX(p) - X_0 = AX(p) + BU(p) \\ Y(p) = CX(p) + DU(p) \end{cases} <=> \begin{cases} X(p) = (pI - A)^{-1} BU(p) + (pI - A)^{-1} X_0 \\ Y(p) = CX(p) + DU(p) \end{cases}$$

En réunissant les deux équations, ont obtient :

$$Y(p) = \left(C(pI - A)^{-1} B + D \right) U(p) + C(pI - A)^{-1} X_0$$

Le premier terme de l'équation correspond à la réponse forcée, le deuxième terme à la réponse libre. La fonction de transfert matricielle entre U et Y est donc la matrice H de dimension (s,e) définie par :

$$H(p) = C(pI - A)^{-1} B + D$$

Chacun des termes $h_{ij}(p)$ est une fonction de transfert rationnelle indiquant la relation entre la $i^{\text{ème}}$ sortie et la $j^{\text{ème}}$ entrée.

Notez que le calcul fait intervenir l'inversion formelle de (pI-A). La méthode d'inversion pour les matrices de dimension 2 et 3 est donnée en annexe.

b) Passage par la forme commandable

IV. Systèmes échantillonnés

Il faut réadapté les premiers chapitres aux systèmes à temps discret et distinguer les particularités introduites par l'échantillonnage. Les chapitres suivants s'appliqueront alors indifférement aux systèmes continus et discrets.

IV.1. Equation d'état.

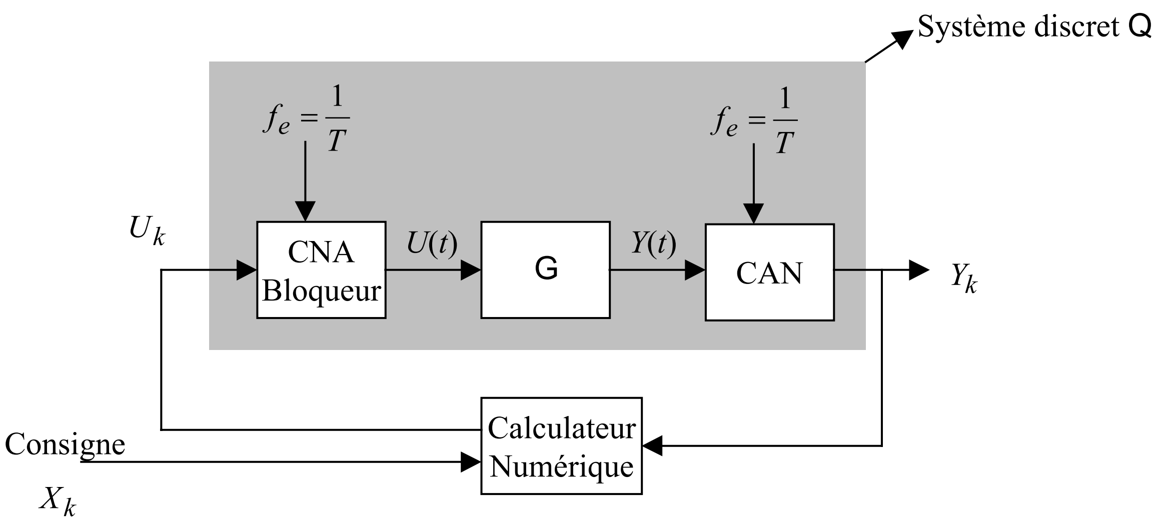
Elles se rapportent à un système dont l'entrée et la sortie n'évoluent qu'à des instants fixes kT (T période d'échantillonnage). On pose alors $U(kT) = U_k$, $Y(kT) = Y_k$. Le vecteur d'état X_k est lui aussi discret. Il vérifie l'équation d'état discrète :

$$\begin{cases} X_{k+1} = FX_k + GU_k \\ Y_k = PX_k + QU_k \end{cases}$$

<u>Remarque</u> : la dérivation est remplacée par l'accroissement d'un pas sur la suite récurrente.

IV.2. Discrétisation de l'état continu

Considérons un processus continu G caractérisé par son équation d'état. On place ce processus entre un CNA bloqueur et un CAN afin de générer l'asservissement par un calculateur numérique :



On cherche la relation entre les équations d'état de G et celle du système discret Q.

A l'instant kT, le système est dans l'état $X(kT)= X_k$. Entre kT et $(k+1)T$, l'entrée U(t) est constante et vaut $U(t)=U_k$ (effet du CNA bloqueur). Il est donc possible de résoudre le système. On obtient :

$$X_{k+1} = X((k+1)T) = e^{A((k+1)T-kT)} X_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B U_k d\tau$$

$$X_{k+1} = e^{AT} X_k + \left(\int_0^T e^{A\theta} B d\theta \right) U_k \text{, avec } \theta = (k+1)T - \tau$$

Soit, $F = e^{AT}$ et $G = \int_0^T e^{A\theta} B d\theta$

Pour l'équation d'observation, on a :

$$Y(t) = CX(t) + DU(t) \Rightarrow Y(kT) = CX(kT) + DU(kT) \Rightarrow Y_k = CX_k + DU_k$$

Soit P=C et Q=D.

IV.3. Calcul de la matrice G

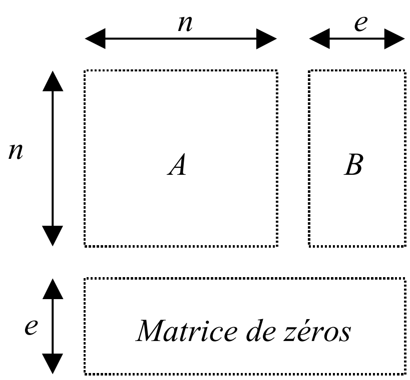
$$G = \int_0^T e^{A\theta} B d\theta = \left(\int_0^T \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i \theta^i}{i!} d\theta \right) B = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^T \frac{A^i \theta^i}{i!} d\theta \right) B = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A^i T^{i+1}}{(i+1)!} \right) B$$

a) Cas ou A est inversible

On a alors $G = A^{-1}\left(e^{At} - I\right)B$

b) Cas général

Dans le cas général, le calcul de G passe par le calcul d'une matrice intermédiaire.On génère la matrice AB par la concaténation des matrices A et B : $AB = \begin{bmatrix} A \quad B \\ zéros(e, n+e) \end{bmatrix}$, ou encore :



On montre facilement que $AB^2 = \begin{bmatrix} A^2 & AB \\ \multicolumn{2}{c}{zéros(e,n)} \end{bmatrix}$, et par récurence que $AB^n = \begin{bmatrix} A^n & A^{n-1}B \\ \multicolumn{2}{c}{zéros(e,n)} \end{bmatrix}$.

On en déduit facilement que $e^{AB} = \begin{bmatrix} e^{At} & G \\ zéros(e,n) & Id(e,e) \end{bmatrix}$.

IV.4.Résolution des équations d'états discrètes

a) Régime libre

La solution de $X_{k+1}^l = FX_k$ avec X_0 comme condition initiale est immédiate :

$$X_k^l = F^k X_0$$

Théorème : le système est stable si et seulement si les valeurs propres de F sont strictement inférieures à 1 (les valeurs propres de F sont les solutions de $\det(zI - F)$).

Remarque : il s'agit de la généralisation du cas discret.

b) Réponse forcée

Elle est donnée par l'équation de récurrence :

$$X_{k+1}^f = \sum_{i=1}^{k} F^{k-i} G U_{i-1}$$

V. Commandabilité et observabilité

V.1. Commandabilité

Définition : un système est dit commandable s'il est possible, par l'action des entrées sur une durée finie, d'amener le système dans un état quelconque.

Considérons l'évolution de l'état d'un système discret en fonction des entrées U_0, U_1, … U_{n-1}. On a :

$$X_1 = AX_0 + BU_0$$

$$X_2 = A^2 X_0 + BU_1 + ABU_0$$

$$X_3 = A^3 X_0 + BU_2 + ABU_1 + A^2 BU_0$$

$$\ldots$$

$$X_n = A^n X_0 + BU_{n-1} + ABU_{n-2} + \ldots + A^{n-2} BU_1 + A^{n-1} BU_0$$

Le système est donc commandable s'il existe une séquence d'entrée $U_0, U_1 \ldots U_{n-1}$ tel que :

$$X_n - A^n X_0 = BU_{n-1} + ABU_{n-2} + \ldots + A^{n-2} BU_1 + A^{n-1} BU_0$$

Il est possible de mettre le deuxième terme sous forme d'équation matricielle :

$$X_n - A^n X_0 = Co\mathbf{U}$$

avec Co, la matrice de commandabilité défini par

$$Co = \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \ldots & A^{n-1} B \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{U} = (U_{n-1}^T, U_{n-2}^T, \ldots, U_1^T, , U_0^T)^T$$

Théorème : L'équation (1) à une unique solution U quelque soit si et seulement si la matrice Co est de rang n. De plus, s'il existe plusieurs solutions, la solution d'énergie minimale est donnée par : $\mathbf{U} = Co^T \cdot \left(Co \cdot Co^T\right)^{-1} (X^n - A^n X_0)$.

V.2. Observabilité

Définition : un système est dit observable s'il est possible, par la connaissance des entrées et des sorties du système sur une durée finie de déterminer son état initial.

Considérons l'évolution de la sortie d'un système discret en fonction des entrées U_0, U_1, … U_{n-1}. On a :

$$Y_0 = CX_0$$

$$Y_1 = CAX_0 + CBU_0$$

$$Y_2 = CA^2 X_0 + CBU_1 + CABU_0$$
$$Y_3 = CA^3 X_0 + CBU_2 + CABU_1 + CA^2 BU_0$$
$$\dots$$
$$Y_{n-1} = CA^{n-1} X_0 + CBU_{n-1} + CABU_{n-2} + \dots + CA^{n-2} BU_1 + CA^{n-1} BU_0$$

Si les entrées et les sorties sont connus, alors les termers $CA^j BU_i$ peuvent-être calculé. Il est donc possible de faire l'hypothèse que l'entrée Uk est toujours nulle. Dans ce cas, le problème d'observation se rammène à la résolution de l'équation :

$$\mathbf{Y} = Obs \cdot X_0$$

avec Obs, la matrice $(n \cdot s, n)$ d'observabilité définie par : $Obs = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ et $\mathbf{Y}$ le vecteur d'observation définit par $\mathbf{Y} = (Y_0{}^T, y_1{}^T, .., Y_{n-1}{}^T)^T = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_{n-1} \end{bmatrix}$.

L'équation à une solution unique si et seulement si la matrice Obs est de rang n.

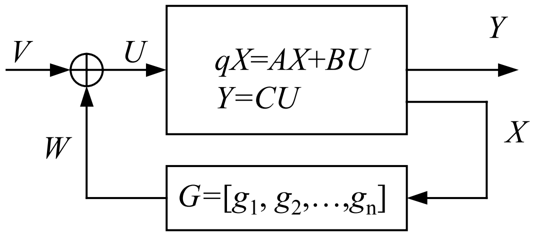
VI. Commande par retour d'état

VI.1. Forme commandable

Pour effectuer l'asservissement par retour d'état d'un système mono-variable, il faut d'abord mettre les équations d'état sous forme canonique commandable. Si la fonction de transfert $G(p)$ du système est connue, la forme canonique commandable est obtenue directement. Dans le cas général, il faut effectuer appliquer la méthode décrite précédemment.

VI.2.Asservissement par retour d'état

On suppose, dans un premier temps, que l'état X est directement observé. On peut alors construire un retour d'état selon le schéma suivant :



avec $q=p$ pour un modèle continu et $q=z$ pour un modèle discret et G une matrice ligne de gain. Le scalaire W est donc égale à :

$$W = [g_1, g_2, ..., g_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot x_i$$

Les équations d'état du système en boucle fermée s'écrivent alors:

$$\begin{cases} qX = (A - BG)X + BV \\ Y = CX \end{cases}$$

On cherche le vecteur de gain G tel que la matrice d'évolution libre du système asservi $A - BG$ soit stable et rapide.

<u>a) Choix des pôles du système</u>

Pour obtenir un système asservi stable et rapide, on fixe a priori la position des pôles du système que l'on souhaite obtenir. Cela détermine le dénominateur $D(p)$ de la fonction de transfert $H(p)$ du système en boucle fermée.

$$D(p) = p^n + d_{n-1}p^{n-1} + ... + d_1 p + d_0$$

b) Cas de la forme commandable

Dans le cas ou la forme est commandable, on a directement :

$$A - BG = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & ... & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [g_1, g_2, ..., g_n]$$

soit

$$A - BG = \begin{bmatrix} -(a_{n-1} + g_1) & -(a_{n-2} + g_2) & ... & -(a_1 + g_{n-2}) & -(a_0 + g_n) \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On souhaite que la matrice d'évolution libre du système en boucle fermée corresponde à une fonction de transfert ayant $D(p)$ comme dénominateur. Soit :

$$A - BG = \begin{bmatrix} -d_{n-1} & -d_{n-2} & ... & -d_1 & -d_0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Par identification, on en déduit immédiatement :

$$\begin{cases} g_1 = d_{n-1} - a_{n-1} \\ g_2 = d_{n-2} - a_{n-2} \\ .... \\ g_n = d_0 - a_0 \end{cases}$$

c) Cas général

Dans le cas général, on se ramène à la forme commandable par l'intermédiaire de la transformation $T = T_1 T_2$.

Ce passage s'effectue en deux étapes. On utilise d'abord matrice de commandabilité comme matrice de changement de base ($T_1 = Co$) pour obtenir la forme canonique d'observabilité. Cette forme permet déjà de connaître les coefficients (a_0, a_1, …, a_{n-1}) du numérateur de la fonction de transfert. A partir de ces coefficients, on crée une deuxième matrice T_2 de changement de base définie par :

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & \dots & a_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de la matrice A_2 de commandabilité, on en déduit le vecteur de gain G_2. On retrouve le vecteur G par la relation $G = G_2 T^{-1}$.

VI.3. Reconstruction d'état

Si l'état X du système n'est pas disponible (courant dans un moteur, par exemple), il faut le reconstruire.

a) Cas du système observable

Si le système est observable, la reconstruction exacte de X est possible par l'observation des sorties passées (les n dernières sorties pour le cas discret). Le problème est donc résolu.

b) Reconstructeur dynamique

Il s'agit ici de "simuler" le système à partir de l'observation de l'entrée et de la sortie afin d'obtenir une estimation $\hat{X}$ du vecteur X.

Dans le cas idéal, $\hat{X} = X$. Si ce n'est pas possible, on cherche à obtenir $\lim_{t \to +\infty} \hat{X} - X = 0$ dans le cas déterministe. Dans le cas aléatoire, on cherche à minimiser $E(\|\hat{X} - X\|^2)$.

On définit l'estimateur par l'équation :

$$q\hat{X} = A\hat{X} + BU + K(Y - \hat{Y}).$$

L'équation $q\hat{X} = A\hat{X} + BU$ correspond au modèle du système. Le terme $K(Y - \hat{Y})$ est un terme correctif basé sur la différence entre l'observation réelle Y et l'observation prédite $\hat{Y} = C\hat{X}$. La matrice K est une matrice (n, s) de gain.

L'équation de l'estimateur s'écrit donc :

$$q\hat{X} = (A - KC)\hat{X} + BU + KY$$

Etudions l'écart $\widetilde{X} = \hat{X} - X$ entre l'état simulé $\hat{X}$ et l'état réel X. On a :

$$q\widetilde{X} = q\hat{X} - qX = ((A - KC)\hat{X} + BU + KY) - (AX + BU)$$

En simplifiant par BU et en écrivant que $AX = (A - KC)X + KCX = (A - KC)X + KY$, on obtient :

$$q\widetilde{X} = (A - KC)\widetilde{X}$$

L'écart entre l'état simulé et l'état réel tend vers 0 si et seulement si la matrice $A - KC$ est une matrice de stabilité.

Pour trouver la matrice de gain K permettant de stabilité la matrice, il suffit d'utiliser le fait que si $A - KC$ est stable, alors la matrice transposée $(A - KC)^T$ est aussi stable, la réciproque étant vrai.

Or $(A - KC)^T = (A^T - C^T K^T)$

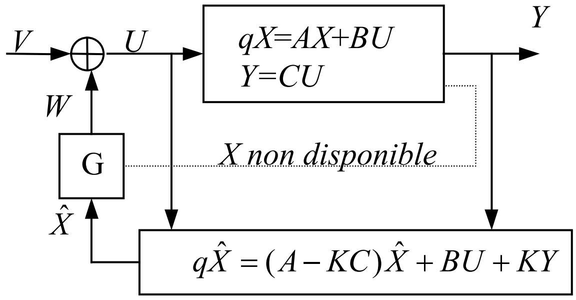
On retrouve un problème de la forme du VI.2 : il suffit donc d'appliquer les mêmes méthodes de stabilisation pour le système fictif définit par

$$\begin{cases} A \to A^T \\ B \to C^T \end{cases}$$

Pour obtenir une matrice de gain G appropriée. Ensuite, K est donnée par $K = G^T$.

VI.4 Stabilisation par état reconstruit

Il s'agit de combiner les deux méthodes :



On montre que le vecteur état $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} X \\ \hat{X} - X \end{pmatrix}$ vérifie :

$$\begin{cases} q\mathrm{X} = \begin{pmatrix} A - BG & -BG \\ 0 & A - KC \end{pmatrix}\mathrm{X} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y = (C \quad 0)\mathrm{X} \end{cases}$$

On remarque :
a) les deux matrices (A-BG) et (A-KC) de la diagonale sont stables, ***A*** est stable.
b) A est décomposée selon la commandabilité => $\hat{X}$ n'est pas commandable.
c) La fonction de transfert $H(p) = C(pI\text{-}A\text{+}BG)^{-1}$ du système est identique à celle d'une commande idéale par retour d'état.

ATTENTION : Il peut y avoir un transitoire parasite, le temps, pour l'estimateur, de déterminer correctement l'état courant.

ANNEXE

Inversion de la matrice

Dans le cas général : $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} comat(A)^T$

Soit *Ac* la comatrice de *A*. Le terme *Ac*(*i*,*j*) s'obtient par :

$$Ac(i, j) = (-1)^{i+j} \det(\widetilde{A}_{i,j})$$

avec $\widetilde{A}_{i,j}$ la matrice de dimension (*n*-1, *n*-1) obtenu en supprimant la *i*ème ligne et *j*ème colonne de la matrice A.

Calcul de déterminant

En dimension 2 : $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$, on a alors : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

En dimension 3 :

$$\det\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{00}a_{11}a_{22} + a_{01}a_{12}a_{20} + a_{02}a_{10}a_{21} - a_{00}a_{12}a_{21} - a_{01}a_{10}a_{22} - a_{02}a_{11}a_{20}$$