



Licence GEII

Notes de cours d'asservissement

Emmanuel BOUTILLON

mars 2001

IUP de Lorient, Université de Bretagne Sud
2, rue Le Coat St-Haouen, 56325 Lorient cedex
Tél. 02 97 88 05 50 – Fax. 02 97 88 05 51

Table des matières

Partie I : Introduction aux systèmes asservis	2
Partie II : Caractérisation, identification des systèmes linéaires.....	3
II.1. La transformée de Laplace	3
II.2. Représentations fréquentielles.....	5
II.3. Système du premier ordre.....	6
II.4. Système du deuxième ordre.....	7
II.5. Système à retard pur	9
II.6. Stabilité d'un système.....	10
Partie III : Asservissement	12
III.1 Stabilité des systèmes asservis	12
III.2. Marge de gain, marge de phase.....	12
III.3. Abaque de Black-Nichols.....	13
III.4. Précision des systèmes asservis.....	15
Partie IV : La correction des systèmes asservis	16
IV.1. Correcteur à avance de phase.....	16
IV.2. Correcteur à retard de phase.....	17
IV.3. Correcteur PID	18
Partie V : Conclusion	19

Partie I : Introduction aux systèmes asservis

Le but de la théorie des systèmes asservis est de commander un système physique en respectant un cahier des charges spécifiant les contraintes de stabilité, de vitesse et précision.

Ce cours décrit les principales méthodes d'asservissement pour les systèmes linéaires continus à une entrée et une sortie. Seules les méthodes de corrections fréquentielles de système linéaire à temps invariant sont abordées.

IMPORTANT : Tous les points vus en cours ne sont pas nécessairement repris dans ce document.

Partie II : Caractérisation, identification des systèmes linéaires

II.1. La transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un outil permettant de manipuler et résoudre simplement les équations différentielles linéaire à coefficients constants.

Définition

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ est définie par :

$$L(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt$$
, avec $F(p)$ définie sur l'ensemble des valeurs p complexe lesquels l'intégrale converge.

Réciproquement :

$$L^{-1}(F(p)) = f(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{C-j \cdot \infty}^{C+j \cdot \infty} f(p) \cdot e^{p \cdot t} dp$$
 avec C tel que la droite $x = C$ soit incluse dans le domaine de convergence de la fonction $F(p)$.

Propriétés

Linéarité ($a, b \in \mathbb{C}$) : $L(af(t) + bf(t)) = aF(p) + bG(p)$

Décalage temporel ($\tau \in \mathbb{R}^+$) : $L(f(t - \tau) \cdot u(t - \tau)) = F(p) \cdot e^{-\tau \cdot p}$

Dilatation du temps ($a \in \mathbb{R}^+$) : $L(f(a \cdot t)) = 1/a \cdot F(p/a)$

Multiplication par t^n ($n \in \mathbb{N}$) : $L(t^n \cdot f(t)) = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{dp^n} F(p)$

Multiplication par $e^{\alpha t}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) : $L(e^{\alpha t} \cdot f(t)) = F(p - \alpha)$

Dérivation d'ordre 1 : $L\left(\frac{d}{dt} f(t)\right) = p \cdot F(p) - f(0)$

Dérivation d'ordre 2 : $L\left(\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right) = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - \frac{d}{dt} f(0)$

Dérivation d'ordre n : $L\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = p^n \cdot F(p) - \sum_{i=0}^{n-1} p^i \cdot \frac{d^{n-1-i}}{dt^{n-1-i}} f(0)$

Intégration : $L\left(\int_0^t f(u) du\right) = 1/p \cdot F(p)$

Convolution : $L(f(t) * g(t)) = F(p) \cdot G(p)$

Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \cdot F(p)$

Théorème de la valeur finale : $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot F(p)$

Table de transformées usuelles

$u(t)$	\leftrightarrow	$\frac{1}{p}$	fonction échelon
$u(t) - u(t - T)$	\leftrightarrow	$\frac{1 - e^{-T \cdot p}}{p}$	fonction rectangulaire
$\delta(t)$	\leftrightarrow	1	fonction Dirac
$\delta(t - t_0)$	\leftrightarrow	$e^{-t_0 \cdot p}$	fonction Dirac décalée
$e^{-a \cdot t}$	\leftrightarrow	$\frac{1}{p + a}$	
$t^n \cdot e^{-a \cdot t}$	\leftrightarrow	$\frac{n!}{(p + a)^{n+1}}$	
$\cos(\omega \cdot t)$	\leftrightarrow	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	
$\sin(\omega \cdot t)$	\leftrightarrow	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	
$e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$	\leftrightarrow	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$	
$e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$	\leftrightarrow	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$	
$t \cdot \cos(\omega \cdot t)$	\leftrightarrow	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	
$t \cdot \sin(\omega \cdot t)$	\leftrightarrow	$\frac{2 \cdot p \cdot \omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$	

Réponse d'un système d'ordre 2 à un échelon

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi \cdot \omega_n \cdot t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t + \text{Arc cos}(\xi)) \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{p \cdot ((p/\omega_n)^2 + 2 \cdot \xi \cdot (p/\omega_n) + 1)}$$

Décomposition en éléments simples

Cas où il n'y a que des racines simples, avec $\deg(N(p)) < \deg(D(p))$

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdots (p - p_n)} = \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_2}{p - p_2} + \cdots + \frac{r_n}{p - p_n}$$

avec $r_i = (p - p_i) \cdot G(p) \Big|_{p=p_i}$ pour $i = 1$ à n (les r_i sont appelés résidus).

Cas d'une racine multiple : supposons p_1 racine multiple d'ordre k .

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1)^k \cdot (p - p_{k+1}) \cdots (p - p_n)}$$

alors

$$G(p) = \frac{r_1}{p - p_1} + \frac{r_2}{(p - p_1)^2} + \cdots + \frac{r_k}{(p - p_1)^k} + \frac{r_{k+1}}{p - p_{k+1}} + \cdots + \frac{r_n}{p - p_n}$$

avec :

$$r_i = \frac{1}{(k - i)!} \cdot \frac{d^{k-i}}{dt^{k-i}} (p - p_1)^k \cdot f(t) \Big|_{p=p_1} \text{ pour } i = 1 \text{ à } k.$$

et

$$r_i = (p - p_i) \cdot G(p) \Big|_{p=p_i} \text{ pour } i = k+1 \text{ à } n.$$

On généralise sans problème dans le cas où $D(p)$ contient plusieurs racines multiples.

Remarque : pour tester rapidement que la décomposition est correcte, il suffit de vérifier l'égalité entre l'évaluation de $G(p)$ sous forme décomposée et sous forme factorisée pour une valeur particulière de p .

II.2. Représentations fréquentielles

Soit $G(p)$ la fonction de transfert d'un système, pour $p = j\omega$, on obtient le gain complexe d'un système $G(j\omega)$ pour la pulsation ω .

On peut écrire $G(j\omega) = \rho(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$ avec $\rho(\omega) = |G(j\omega)|$ le gain du système et $\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$ l'argument du système pour la fréquence ω .

Diagramme de Bode :

Les deux courbes $(\omega, \rho(\omega))$ et $(\omega, \varphi(\omega))$, avec ω (en radian par seconde) représenté sur une échelle logarithmique et $\rho(\omega)$ représenté en dB.

Diagramme de Black-Nichols :

La courbe paramétrique $(\varphi(\omega), \rho(\omega))$ avec $\rho(\omega)$ représenté en dB et ω variant de 0 à +infini.

Diagramme de Nyquist :

La courbe paramétrique $(\text{Re}(G(j\omega)), \text{Im}(G(j\omega))) = (\rho(\omega)\cos(\varphi(\omega)), \rho(\omega)\sin(\varphi(\omega)))$ avec ω variant de 0 à +infini.

Exemple : si $G(j\omega) = 2 \cdot e^{-j\pi/3}$ pour $\omega = 0,1$ rd/s, on a dans chaque représentation :

- 1) Diagramme de Bode : les points (0,1 rd/s; +6 dB) et (0,1 rd/s ; -60°)
- 2) Diagramme de Black : le point (-60°, +6 dB) de paramètre $\omega = 0,1$ rd/s.
- 3) Diagramme de Nyquist : le point $(2 \cdot \cos(-60^\circ), 2 \cdot \sin(-60^\circ)) = (-1 ; 1,732)$

II.3. Système du premier ordre

Définition

Ils sont de la forme $G(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$ avec τ constante de temps du système et K le gain statique.

Représentation fréquentielle, pour $\tau=1$.

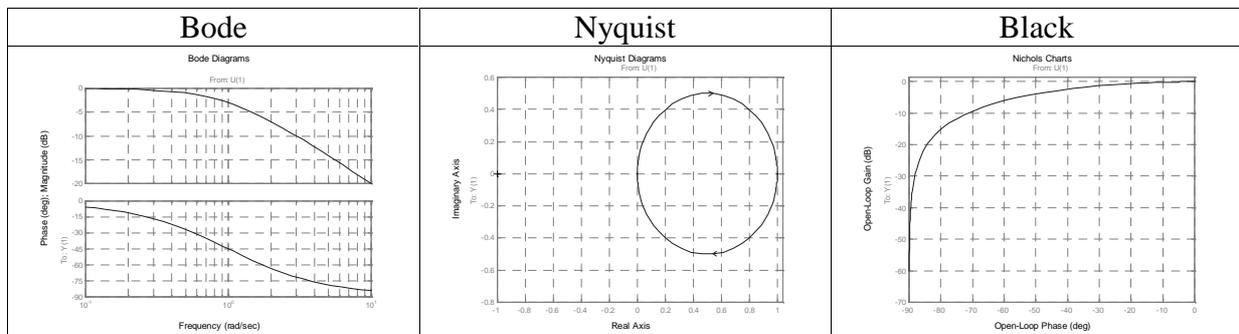


Figure 1 : Représentation fréquentielle d'un système du premier ordre

Réponse temporelle, pour $\tau=1$.

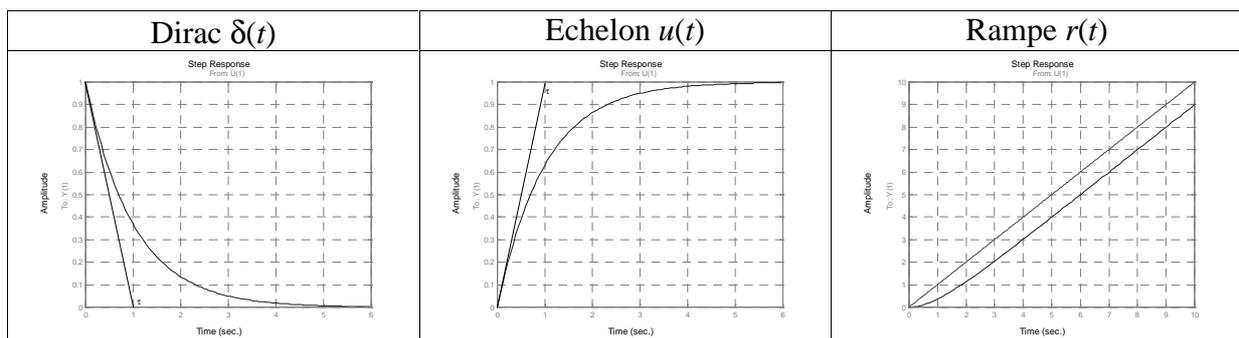


Figure 2 : Réponses temporelles d'un système du premier ordre

Propriétés

Fréquence de coupure : $f_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau}$ et donc : $f_c \cdot \tau = \frac{1}{2 \cdot \pi}$

II.4. Système du deuxième ordre

Les systèmes du deuxième ordre permettent de modéliser une grande classe de systèmes physiques.

Définition

Système de la forme $G(p) = \frac{K}{(p/\omega_n)^2 + 2 \cdot \xi \cdot (p/\omega_n) + 1}$, avec un gain statique K , une fréquence propre ω_n et un coefficient d'amortissement ξ .

En fonction de la valeur de ξ , il existe 4 cas possibles :

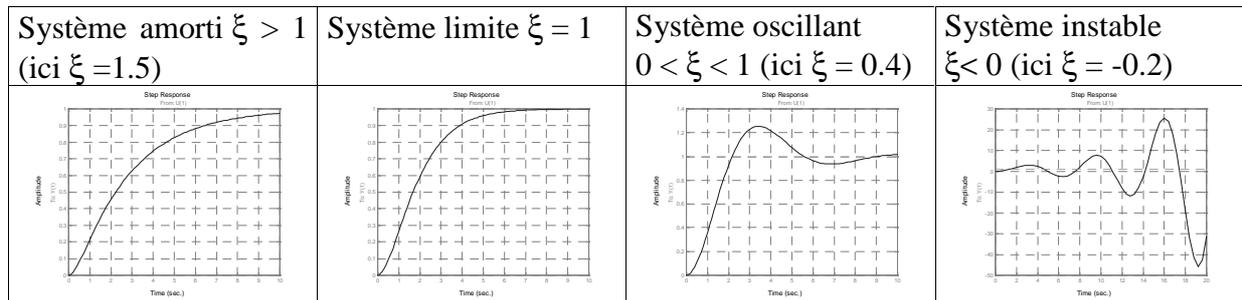


Figure 3 : Réponse à un échelon en fonction du coefficient d'amortissement ξ .

Dans tous les cas, l'erreur de poursuite (quand l'entrée est une rampe) est de $\varepsilon = 2\xi/\omega_n$.

Système amorti ($\xi > 1$)

Le système possède deux racines réelles négatives : $G(p) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{(p - p_1) \cdot (p - p_2)}$ avec

$$p_1 = -\xi \cdot \omega_n + \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \omega_n \text{ et } p_2 = -\xi \cdot \omega_n - \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \omega_n.$$

La réponse d'un tel système à un échelon est donnée par :

$$S(p) = \frac{K \cdot \omega_n^2}{p \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2)} = K \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot (p - p_1)} + \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot (p - p_2)} \right)$$

$$\text{soit } s(t) = K \cdot \left(u(t) + \frac{e^{p_2 t}}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} - \frac{e^{p_1 t}}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \right).$$

Si le coefficient ξ est grand, le système se comporte comme un système du premier ordre de pole p_1 pour les basses fréquences. Il en est de même pour la réponse temporelle à un échelon.

Système limite ($\xi = 1$)

Le système possède une racine double en $-\omega_n$. La réponse temporelle du système à un échelon est $s(t) = K \cdot (u(t) - (1 + \omega_n \cdot t) \cdot e^{-\omega_n t})$

Système oscillant ($0 < \xi < 1$)

Le système possède deux racines complexes conjuguées $p_1 = -\xi \cdot \omega_n + j \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_n$ et $p_2 = -\xi \cdot \omega_n - j \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_n$.

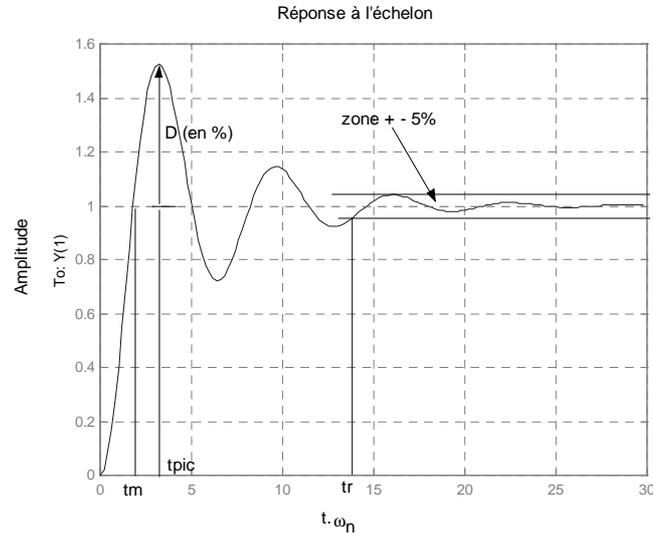


Figure 4 : Réponse à l'échelon d'un système du deuxième ordre

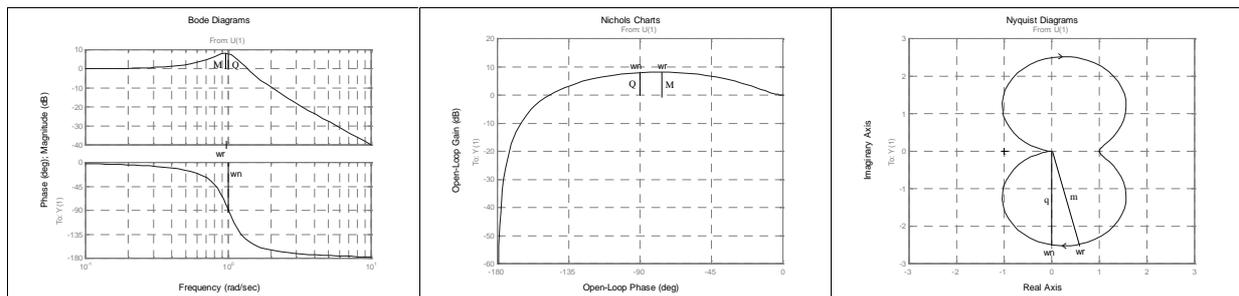


Figure 5 : Représentations fréquentielle d'un système du deuxième ordre

Paramètre	Formule en fonction de ξ et ω_n
Dépassement D (en %)	$D = 100 \cdot e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}$
Temps de réponse à $n\%$ (pour $\xi < 0,5$)	$t_r \approx \frac{1}{\omega_n \cdot \xi} \text{Loge}\left(\frac{100}{n}\right)$
Temps de pic	$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$
Pseudo-période	$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}}$
Pseudo-Pulsation	$\omega_p = \omega_n \cdot \sqrt{1-\xi^2}$

Pulsation de résonance	$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\xi^2}$
Facteur de résonance (M = 20.log ₁₀ (m) en dB)	$m = \frac{1}{2\xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$ (M en dB)
Facteur de qualité	$q = \frac{1}{2\xi}$ (Q en dB)

Le tableau suivant permet de récapituler les différentes valeurs des paramètres en fonction du paramètre ξ .

ξ	Dépas-sement en %	Temps de réponse à 5% t_r (en s)	Temps de pic t_{pic} (en s)	Pseudo période T_p (en s)	Pseudo Pulsation ω_p (en rd/s)	Pulsation résonance ω_R (en rd/s)	Facteur de Qualité Q (en dB)	Facteur de sur-oscillation (M en dB)
0,05	85,45	60,0/ ω_n	3,15/ ω_n	6,29/ ω_n	1,00 ω_n	1,00 ω_n	20,00	20,01
0,10	72,92	30,0/ ω_n	3,16/ ω_n	6,31/ ω_n	1,00 ω_n	0,99 ω_n	13,98	14,02
0,15	62,09	20,0/ ω_n	3,18/ ω_n	6,35/ ω_n	0,99 ω_n	0,98 ω_n	10,46	10,56
0,20	52,66	15,0/ ω_n	3,21/ ω_n	6,41/ ω_n	0,98 ω_n	0,96 ω_n	7,96	8,14
0,25	44,43	12,0/ ω_n	3,24/ ω_n	6,45/ ω_n	0,97 ω_n	0,94 ω_n	6,02	6,30
0,30	37,23	20,0/ ω_n	3,29/ ω_n	6,59/ ω_n	0,95 ω_n	0,91 ω_n	4,44	4,85
0,35	30,92	8,6/ ω_n	3,35/ ω_n	6,71/ ω_n	0,94 ω_n	0,87 ω_n	3,10	3,67
0,40	25,38	7,5/ ω_n	3,43/ ω_n	6,86/ ω_n	0,92 ω_n	0,82 ω_n	1,94	2,69
0,45	20,53	6,7/ ω_n	3,52/ ω_n	7,04/ ω_n	0,89 ω_n	0,77 ω_n	0,91	1,90
0,50	16,30	6,0/ ω_n	3,63/ ω_n	7,25/ ω_n	0,87 ω_n	0,71 ω_n	0,00	1,25
0,55	12,63	5,4/ ω_n	3,76/ ω_n	7,52/ ω_n	0,83 ω_n	0,63 ω_n	-0,83	0,74
0,60	9,48	5,0/ ω_n	3,93/ ω_n	7,85/ ω_n	0,80 ω_n	0,53 ω_n	-1,58	0,35
0,65	6,81	4,6/ ω_n	4,13/ ω_n	8,27/ ω_n	0,76 ω_n	0,39 ω_n	-2,28	0,11
0,70	4,60	3,2/ ω_n	4,40/ ω_n	8,80/ ω_n	0,71 ω_n	0,14 ω_n	-2,92	0,00
0,75	2,84	4,0/ ω_n	4,75/ ω_n	9,50/ ω_n	0,66 ω_n	-	-3,52	-
0,80	1,52	3,7/ ω_n	5,24/ ω_n	10,47/ ω_n	0,60 ω_n	-	-4,08	-
0,85	0,63	3,8/ ω_n	5,96/ ω_n	11,93/ ω_n	0,53 ω_n	-	-4,61	-
0,90	0,15	3,9/ ω_n	7,21/ ω_n	14,41/ ω_n	0,43 ω_n	-	-5,10	-
0,95	0,01	4,3/ ω_n	10,06/ ω_n	20,12/ ω_n	0,31 ω_n	-	-5,57	-

II.5. Système à retard pur

Ce sont des systèmes pour lesquels la mesure de l'état du système est obtenue avec un décalage temporelle par rapport à l'état réel du système. La figure suivante donne un exemple d'un tel système avec retard pur :

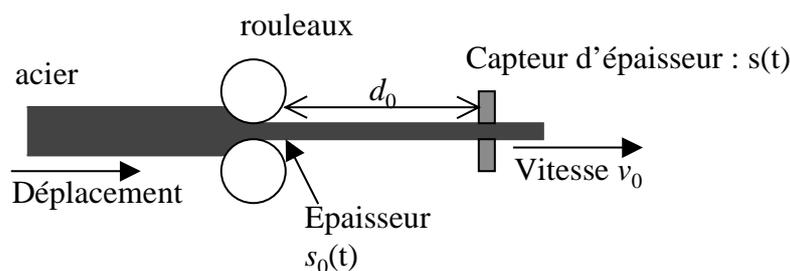


Figure 6 : Exemple de système à retard pur

Le capteur d'épaisseur de la plaque est, pour des raisons d'encombrement, situé à une distance d_0 des rouleaux. Les plaques d'aciers se déplaçant à vitesse constante v_0 , on a un temps de retard $t_0 = d_0/v_0$ entre l'épaisseur $s_0(t)$ en sortie des rouleaux et $s(t)$ mesuré, soit :

$$s(t) = s_0(t-t_0).$$

Dans le domaine de Laplace, on alors $G(p) = G_0(p)e^{-t_0 p}$

Ce retard se traduit par un déphasage pur dépendant de la pulsation du système.

La figure suivante montre, sur le diagramme de Nyquist, l'influence d'un retard de 0,1 seconde sur une fonction de transfert du premier ordre $G(p) = 1/(1+0,5p)$.

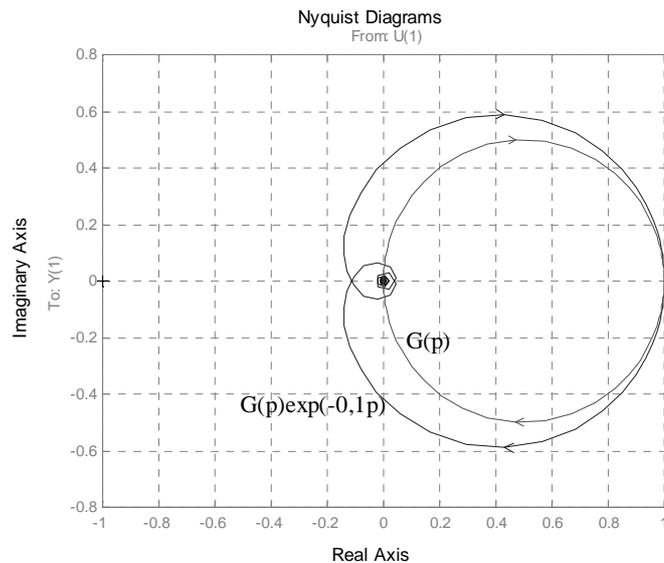


Figure 7 : Influence d'un retard pur sur le lieu de Nyquist

Ce type de retard peut entraîner des instabilités dans un système asservi.

II.6. Stabilité d'un système

Etudier la stabilité d'un système linéaire à temps invariant revient à étudier la position des pôles de la fonction de transfert $G(p)$ dans le plan complexe. Si le dénominateur $D(p)$ de la fonction de transfert est sous une forme non factorisée, on étudie la stabilité du filtre en utilisant le critère de Routh.

Théorème

Le système de fonction de transfert $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ est stable si et seulement si tous les pôles de $G(p)$ sont à parties réelles strictement négatives.

Critère de Routh

Etudier la stabilité de $G(p)$ revient donc à étudier les racines de :

$$D(p) = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0$$

Si l'expression de $D(p)$ n'est pas factorisée, les racines de $D(p)$ ne sont pas connues. Il est néanmoins possible de vérifier par le critère de Routh si toutes les racines ont leur partie réelle négative ou non.

Critère de Routh : si l'un des coefficients a_i est nul ou négatif, le système n'est pas stable. Si tous les coefficients sont strictement positifs, alors on construit le tableau de Routh. On initialise les deux premières lignes du tableau de Routh par les coefficients de $D(p)$ comme indiqué ci-dessous.

$$\begin{array}{l} p^n \\ p^{n-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{11} = a_n \\ A_{21} = a_{n-1} \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{12} = a_{n-2} \\ A_{22} = a_{n-3} \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{13} = a_{n-4} \\ A_{23} = a_{n-5} \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{14} = a_{n-6} \\ A_{24} = a_{n-7} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(cas général : } A_{1k} = a_{n-2.k} \text{)} \\ \text{(cas général : } A_{2k} = a_{n-1-2.k} \text{)} \end{array}$$

et on complète les $n-2$ lignes suivantes itérativement en utilisant la formule :

$$A_{ij} = - \frac{\det \begin{bmatrix} A_{(i-2),1} & A_{(i-2),(j+1)} \\ A_{(i-1),1} & A_{(i-1),(j+1)} \end{bmatrix}}{A_{(i-1),1}} = \frac{A_{(i-1),1} \cdot A_{(i-2),(j+1)} - A_{(i-2),1} \cdot A_{(i-1),(j+1)}}{A_{(i-1),1}}$$

Le nombre de changements de signes dans la première colonne donne le nombre de zéros de $D(p)$ ayant une partie réelle positive.

Exemple d'application

Appliquons le critère de Routh pour le polynôme $D(p) = p^4 + 3 \cdot p^3 + 3 \cdot p^2 + 6 \cdot p + 1$.

La construction du tableau de Routh donne :

$$\begin{array}{l} p^4 \\ p^3 \\ p^2 \\ p \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{11} = 1 \\ A_{21} = 3 \\ A_{31} = \frac{9-6}{3} \\ A_{41} = \frac{6-3}{1} \\ A_{51} = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{12} = 3 \\ A_{22} = 6 \\ A_{32} = \frac{3-0}{3} \\ A_{42} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{13} = 1 \\ A_{23} = 0 \\ A_{33} = \frac{0-0}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} A_{14} = 0 \\ A_{24} = 0 \end{array}$$

Il n'y a pas de changement de signe sur la première colonne, le système est donc stable.

Remarque : si l'un des coefficients de la première colonne est nul, on remplace le zéro par un nombre ε petit et strictement positif. On complète ensuite le tableau. L'existence d'un tel zéro indique néanmoins l'existence d'un pôle sur l'axe imaginaire : le système sera donc pas stable au sens strict

Partie III : Asservissement

Pour améliorer les performances d'un système, on effectue un asservissement : la commande du système physique est générée à partir de l'erreur entre l'entrée du système (la consigne) et la sortie du système (donnée à partir d'un capteur).

Cet asservissement permet de modifier la fonction de transfert global du système.

III.1 Stabilité des systèmes asservis

La fonction de transfert du système $G(p)$ en boucle fermée est $H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)}$. L'étude de la stabilité de $H(p)$ consiste donc à étudier la position des zéros de $1+G(p)$.

Définition :

On appelle contour de Nyquist de la fonction de transfert $G(p)$ l'image par $G(p)$ du demi-disque de rayon infini de diamètre l'axe imaginaire orienté à droite du plan complexe.

Critère de Nyquist :

Le système est stable en boucle fermée si et seulement si le nombre de tours du lieu de Nyquist autour du point -1 dans le sens des aiguilles d'une montre plus le nombre de pôles de $G(p)$ à partie réelle positive, est nul.

(Remarque : un tour autour du point -1 dans le sens **inverse** des aiguilles d'une montre compte pour moins un tour dans le sens des aiguilles d'une montre).

Dans le cas où le système est stable en boucle ouverte et ne contient pas de zéro à partie réelle positive, le critère de Nyquist se simplifie : on parle alors du critère du revers :

Le système est stable si et seulement si le lieu de Nyquist laisse le point -1 à gauche dans le sens des ω croissants.

Dans ce cas, il est possible de définir graphiquement la marge de gain et la marge de phase.

III.2. Marge de gain, marge de phase

Dans le plan de Black, le critère du revers s'énonce de la façon suivante :

Le système est stable si et seulement si le lieu de Black laisse le point -1 à droite dans le sens des ω croissants.

La marge de gain (respectivement marge de phase) est le gain maximum (respectivement, le retard de phase maximum) à partir duquel le système devient instable (passe à droite du point -1).

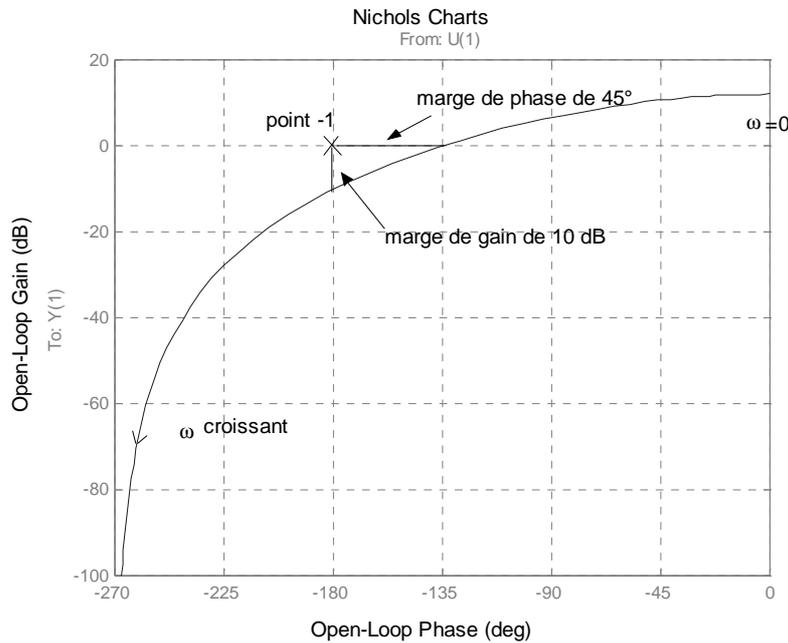


Figure 8 : Marge de gain, marge de phase

Sur la figure suivante, la marge de phase se lit comme la distance (en degrés) entre la courbe et le point -1 pour un gain de 0 dB. La marge de gain se lit comme la distance (en dB) entre la courbe et le point -1 pour une phase de -180°.

En général, pour un système asservi robuste aux variations des paramètres du système, la marge de phase est autour de 50° et la marge de gain autour de 15 dB.

III.3. Abaque de Black-Nichols

La fonction de transfert $H(p)$ se détermine à partir de la fonction de transfert en boucle fermée par $H(p) = \frac{G(p)}{1+G(p)}$.

Cette relation permet de déterminer les caractéristiques (phase et gain) du système en boucle fermée en fonction des paramètres de la boucle ouverte.

L'abaque de Black-Nichols permet de lire graphiquement $H(j\omega)$ à partir de $G(j\omega)$ par le tracé sur le diagramme de Black des courbes "iso-déphasage" et "iso-gain" de la fonction de transfert en boucle fermé.

La figure suivante donne un exemple d'utilisation du diagramme de Black-Nichols pour la fonction $G(p) = \frac{4}{(1+12p)^2(1+50p)}$

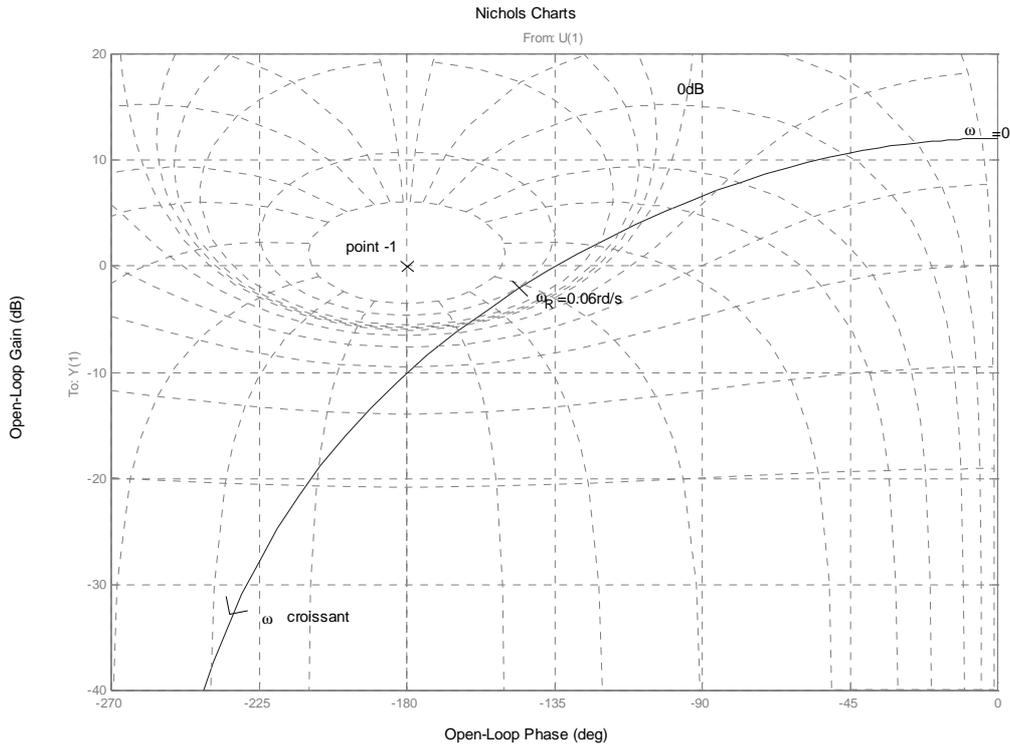


Figure 9 : Abaque de Black Nichols

Pour une fréquence nulle, le gain en boucle fermée est d'environ -1.9 dB. Le gain maximum est de 3 dB. Il est obtenu pour pulsation de résonance $\omega_R = 0.06$ rd/s.

Il est possible de déterminer l'allure de la réponse à un échelon en utilisant un modèle du deuxième ordre. Il s'agit ici de trouver le filtre du second ordre de paramètre (K, ξ, ω_n) ayant le même gain statique, le même facteur de sur-oscillation et la même fréquence de résonance que le système étudié en boucle fermée. On approxime la réponse à l'échelon du système en boucle fermée à celle du deuxième ordre équivalent.

Gain statique : -1.9 dB \Rightarrow Le facteur K est égal à $10^{-1.9/20} = 0.8$.

Le facteur de sur-oscillation est de l'écart entre le gain maximum en boucle fermée et le gain statique. Le gain maximum en boucle fermée est donnée par la courbe de gain en boucle fermée d'amplitude maximale tangente au lieu de Black (dans la figure, $+3$ dB en boucle fermée pour $\omega_R = 0.06$ rd/s).

On a donc : $M = 3 - (-1.9) = 4.9$ dB.

La lecture des abaques nous donne un facteur ξ équivalent de 0.3 .

La relation entre la pulsation de résonance ω_R et la pulsation propre ω_n pour $\xi = 0.3$ est, d'après la lecture des abaques pour $\xi = 0.3$: $\omega_n = \omega_R/0.9 = 0.67$.

Le filtre du deuxième ordre est caractérisé. La figure suivante compare la réponse à un échelon du système en boucle fermée et celle du filtre du deuxième ordre équivalent.

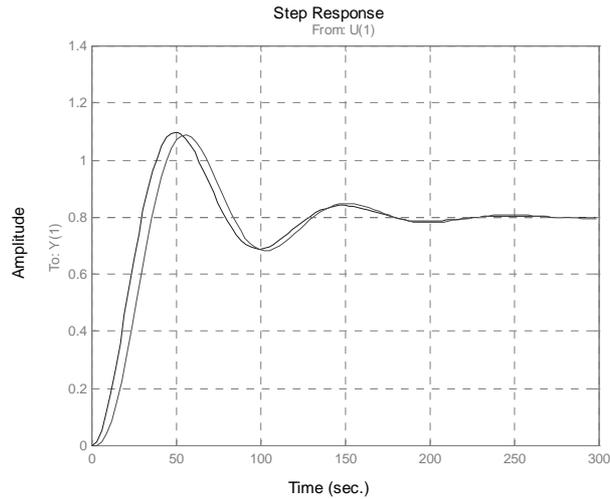


Figure 10 : Comparaison de la réponse à un échelon du système $G(p)$ en boucle fermée et du deuxième ordre équivalent.

L'approximation du deuxième ordre est donc précise.

III.4. Précision des systèmes asservis.

On considère le système de fonction $G(p) = \frac{K \cdot B(p)}{p^n \cdot A(p)}$ en boucle fermée. On cherche à étudier l'écart asymptotique $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$ entre la consigne $e(t)$ et la sortie $s(t)$ pour différents signaux types.

En écrivant $\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) - H(p) \cdot E(p) = E(p) \cdot (1 - H(p)) = \frac{E(p)}{1 + G(p)}$ et en utilisant le théorème de la valeur finale, on obtient les résultats suivants :

$e(t)$	Impulsion $\delta(t)$	Echelon $u(t)$	Rampe $r(t)$	Accélération $t^2/2$
$n=0$	0	$\frac{1}{K+1}$	$+\infty$	$+\infty$
$n=1$	0	0	$\frac{1}{K}$	$+\infty$
$n=2$	0	0	0	$\frac{1}{K}$
$n=3$	0	0	0	0

Tableau n°1 : Erreur entre l'entrée et la sortie en fonction du gain K pour différentes entrées.

En général, l'erreur pour une entrée en échelon s'appelle l'erreur statique, l'erreur pour une entrée en rampe s'appelle l'erreur de poursuite.

Partie IV : La correction des systèmes asservis

La correction "en fréquence" consiste à ajouter un correcteur dans la boucle ouverte de façon à modifier la réponse en fréquence pour obtenir des performances satisfaisantes :

- Augmenter (ou diminuer) la stabilité du système en éloignant (ou en rapprochant) le lieu de Black du point -1 .
- Augmenter la précision en augmentant le gain statique
- Augmenter (ou diminuer) la vitesse en augmentant (ou en diminuant) la bande passante du système.

IV.1. Correcteur à avance de phase

Il est de la forme $C(p) = \frac{1+aT \cdot p}{1+T \cdot p}$ avec $a > 1$. La courbe suivante montre le diagramme de Bode du correcteur à avance de phase pour différentes valeurs du paramètre a .

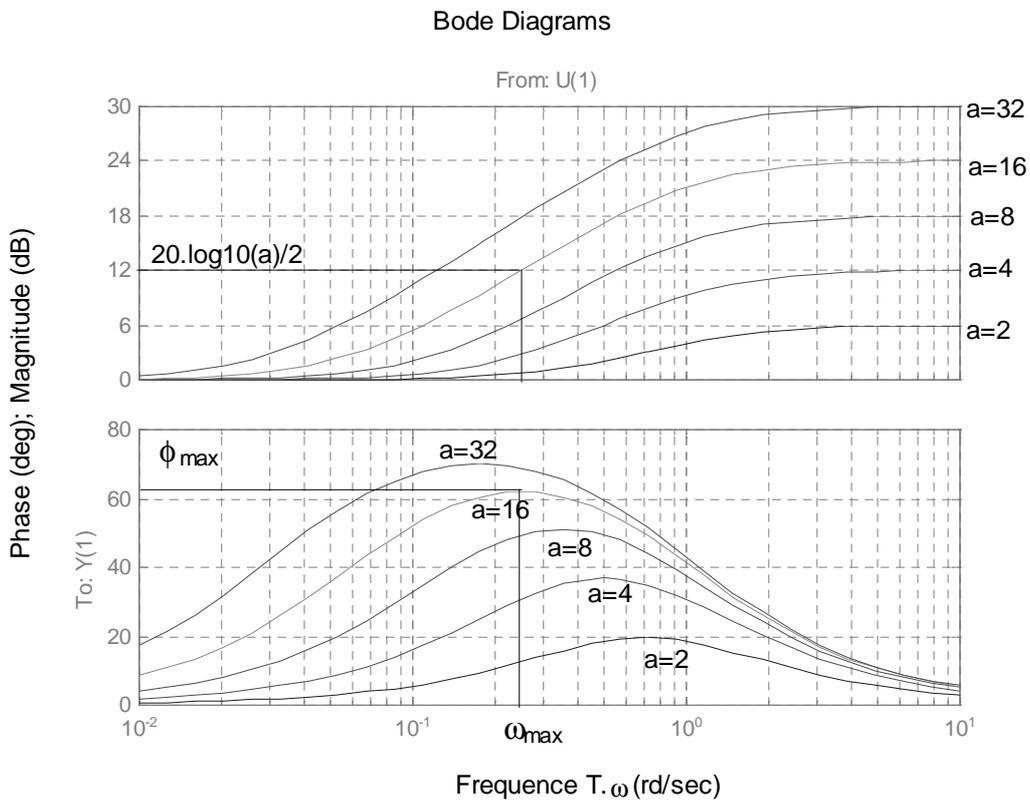


Figure 11 : Diagramme de Bode d'un filtre à avance de phase.

Propriétés

Le déphasage maximum Φ_{max} du filtre à avance de phase est donnée par $\Phi_{max} = \arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$ (voir figure suivante).

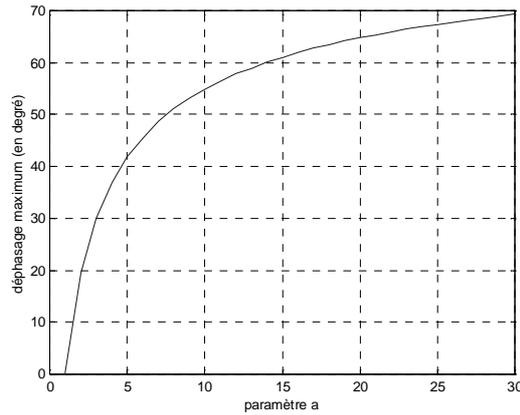


Figure 12 : Déphasage maximum en fonction de a .

La fréquence ω_{\max} donnant le déphasage maximum est $\omega_{\max} = \frac{1}{T \cdot \sqrt{a}}$. Pour cette fréquence, on a un gain $|C(j\omega_{\max})| = \sqrt{a}$.

Utilisation : Le correcteur à avance de phase permet d'augmenter la stabilité du système par l'avance de phase qu'elle apporte.

De plus, l'augmentation du gain pour les fréquences hautes permet d'augmenter la bande passante du système et donc sa rapidité.

IV.2. Correcteur à retard de phase

Il s'agit du correcteur dual du correcteur à avance de phase.

Définition : Il est de la forme $C(p) = \frac{1+T \cdot p}{1+a \cdot T \cdot p}$ avec $a > 1$. Ces caractéristiques en amplitude et en phase se déduisent par symétrie de celles du correcteur à avance de phase.

Propriétés : Le déphasage minimum Φ_{\min} (maximum en valeur absolue) du filtre à avance de phase est donnée par $\Phi_{\min} = -\arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$. La fréquence ω_{\min} donnant le déphasage minimum est $\omega_{\min} = \frac{1}{T \cdot \sqrt{a}}$. Pour cette fréquence, on a un gain $|C(j\omega_{\min})| = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Utilisation : Le correcteur à retard de phase permet d'augmenter la précision d'un système sans nuire à sa stabilité. Un correcteur proportionnel K est ajouté pour atteindre les performances en précision. L'instabilité qui résulte de la diminution de la marge de gain est compensée par un correcteur à retard de phase de paramètre $a = K$ qui atténue les hautes fréquences d'un facteur $1/K$.

De façon duale, le correcteur à retard de phase permet d'augmenter la stabilité sans réduire la précision en diminuant le gain pour les hautes fréquences.

IV.3. Correcteur PID

Il s'agit d'un correcteur couramment utilisé dans l'industrie pour l'asservissement de systèmes servo-mécanique..

Définition

Le correcteur PID a une fonction de transfert du type : $C(p) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + T_d \cdot p\right)$

Le diagramme de Bode du correcteur PID est indiqué dans la figure suivante pour $K=1$, $T_i=2$ et $T_d=1/2$ (en général, $T_d = T_i/4$).

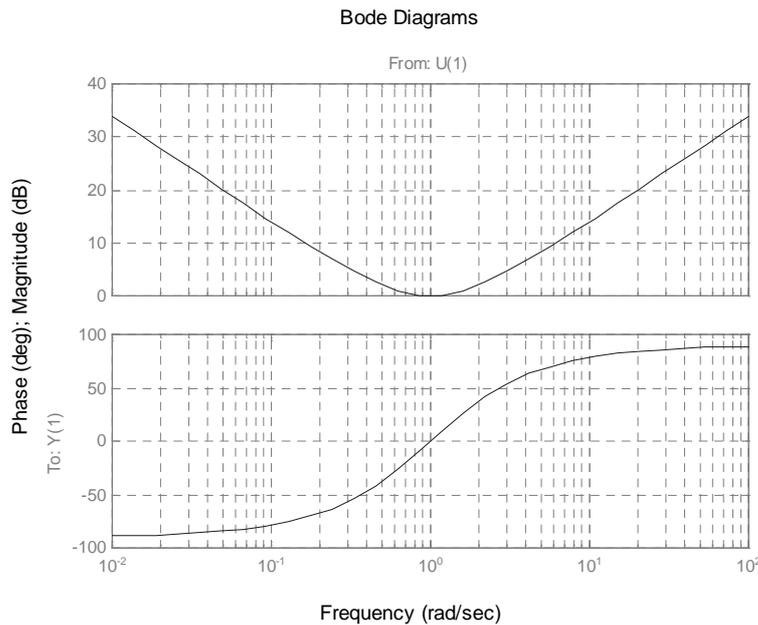


Figure 13 : Diagramme de Bode du PID

La fréquence « neutre » est obtenue pour $\frac{1}{T_i \cdot j \cdot \omega_n} + T_d \cdot j \cdot \omega_n = 0$ soit $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_i \cdot T_d}}$

A partir de la réponse en fréquence du système, le réglage du PID s'effectue en trois étapes :

- déterminer la fréquence neutre du PID comme la fréquence donnant un retard de phase de -110° (point de basculement de la courbe).
- en déduire les deux constantes de temps $T_i = \frac{2}{\omega_n}$ et $T_d = \frac{1}{2\omega_n}$.
- choisir le gain K de façon à obtenir la stabilité souhaitée.

Bien sur, il est possible d'effectuer des corrections Proportionnelles Intégrales (PI) en prenant $T_d = 0$, ou plus rarement, des corrections Proportionnelles Dérivées (PD) en prenant $T_i = +\infty$.

Partie V : Conclusion

Il existe des méthodes (Ziegler-Nichols, par exemple) permettant de configurer directement le PID à partir des paramètres de la réponse temporelle en boucle ouverte du système.

D'une façon générale, lors de la synthèse d'un correcteur, il faut vérifier que la commande générée par le correcteur soit compatible avec le système physique que l'on commande. En particulier, il faut vérifier, que les hypothèses de linéarité du système restent valides pour la gamme de variation de la commande corrigée.

Pour en savoir plus sur l'automatique, il est possible de trouver de l'information sur le WEB. Pour cela, il suffit d'aller sur un moteur de recherche (altavista, yahoo, google et tant d'autres) et de taper un mot clef relié à l'automatique (par exemple « critère de Routh », « Abaque Black », « Abaque Nichols », « Critère de Nyquist », « Ziegler-Nichols »), en général, la moisson est bonne. Il ne reste plus qu'à trier le bon grain de l'ivraie pour trouver l'information souhaitée.

A titre d'exemple, voici deux sites WEB intéressants :

<http://www.univ-lille1.fr/~eudil/belk/sc00a3.htm>

http://www.ac-reims.fr/datice/res_peda/Lyccol/sci_phy/Black/Black.html