I.U.P. Lorient
Licence GEII

avril 2001
Emmanuel Boutillon

Devoir surveillé d'automatique
Systèmes asservis linéaires

Exercice n°1 : On considère le système de fonction de transfert :

$$F(p) = \frac{-0{,}1 \cdot (100p+1)}{(p+1)(0{,}01p+1)}$$

a) Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude et en phase de $F(p)$.

b) Quelle est la valeur initiale de sortie du système pour une entrée impulsion (Dirac) ?

c) Quelle est la valeur finale de sortie du système pour une entrée échelon ?

Exercice n°2 : Donner la transformé de Laplace X(p) de la solution x(t) à l'équation différentielle suivante (<u>on ne cherchera pas à résoudre cette équation</u>).

$$5 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 4te^{-2t} + 1\text{, conditions initiales } x(0) = -8.$$

Exercice n°3 : Inverser (transformée de Laplace inverse) la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{p-1}{p(p+1)^2}$$

Exercice n°4 : On considère le système de fonction de transfert $G(p) = \dfrac{5p-1}{12p^3 + p^2 + 2p + 1}$, le diagramme de Nyquist de ce système est donné en annexe.

a) Ce système est-il stable en boucle ouverte ?

b) Combien possède t'il de pôle à partie réelle positive ?

c) Déterminer les valeurs du gain K pour lesquels le système K.G(p) est stable en boucle fermée (donner une justification).

Exercice n° 5 : On considère un système G(p) dont on connaît le diagramme de Black (voir annexe).

a) Que peut-on dire de la réponse à un échelon du système en boucle ouverte ?

b) Quelle est l'erreur statique du système en boucle fermée ?

c) Quelle est la marge de gain et la marge de phase du système ?

d) Tracer l'allure de la réponse à un échelon du système en boucle fermée (avec, sur le graphique, l'indication de l'amplitude maximale ainsi que l'échelle du temps).

e) Déterminer les caractéristiques d'un correcteur proportionnel permettant de stabiliser correctement le système (c'est-à-dire, une marge de gain d'au moins 15 dB et une marge de phase d'au moins 50°).

f) Quel est l'inconvénient de ce correcteur ?

g) Déterminer les caractéristiques d'un correcteur à avance de phase permettant de ramener la marge de phase à 50° (sans modification de la marge de gain).

i) Donner les caractéristiques d'un correcteur PI permettant, en association avec le correcteur à avance de phase de la question g), de rendre nulle l'erreur de poursuite et ce, sans dégrader la stabilité du système.

REMARQUE : Toutes les questions de ce problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Annexe

Diagramme de Nyquist de G(p) (exercice n° 4)

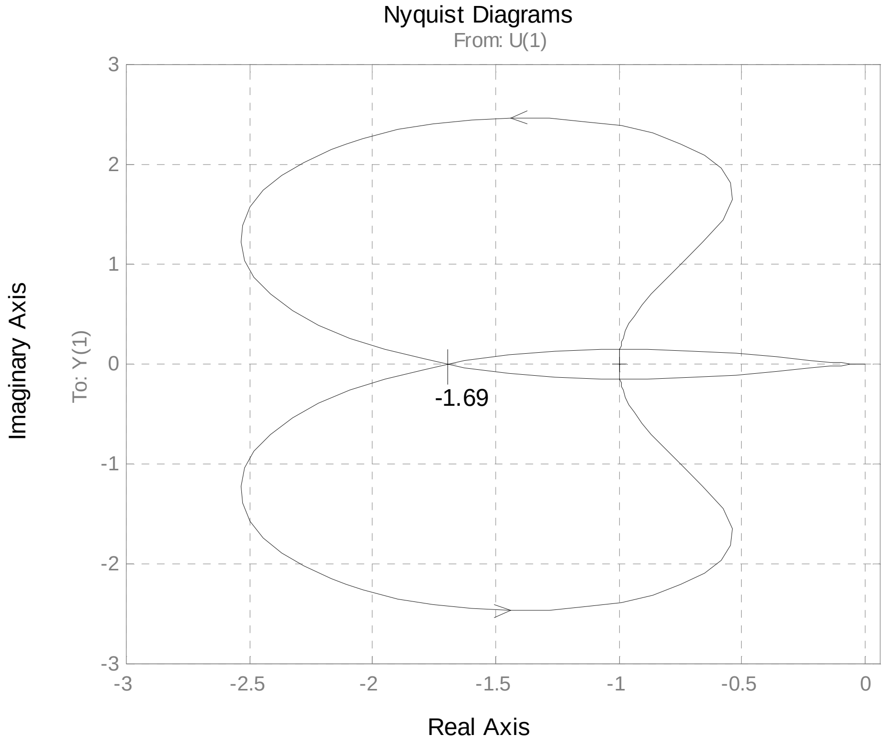
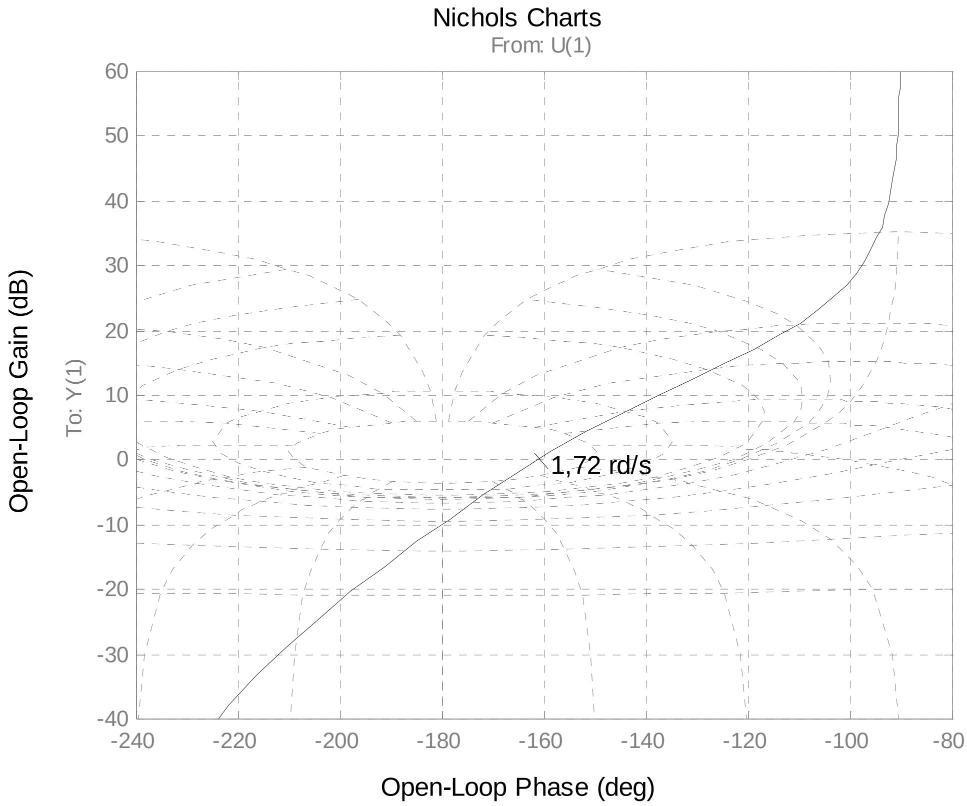


Diagramme de Black (exercice n° 5)



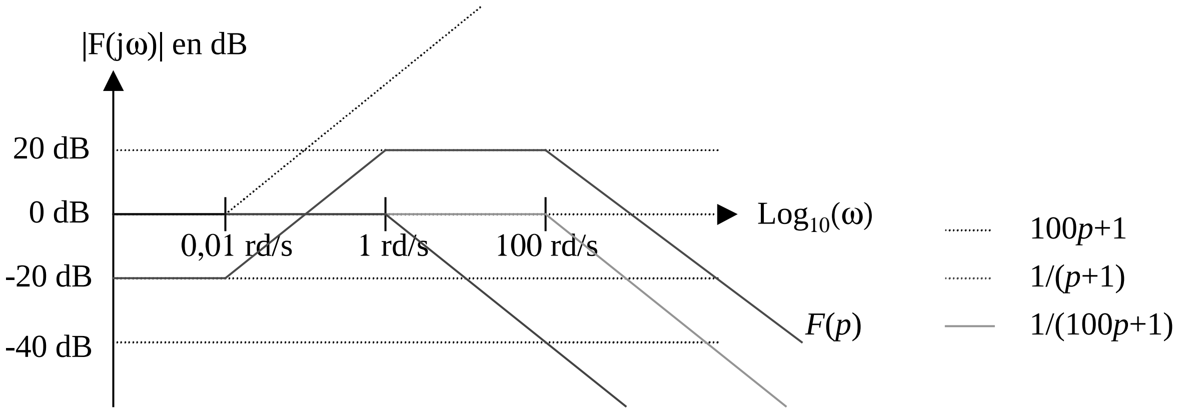
I.U.P. Lorient **avril 2001**
Licence GEII **Emmanuel Boutillon**

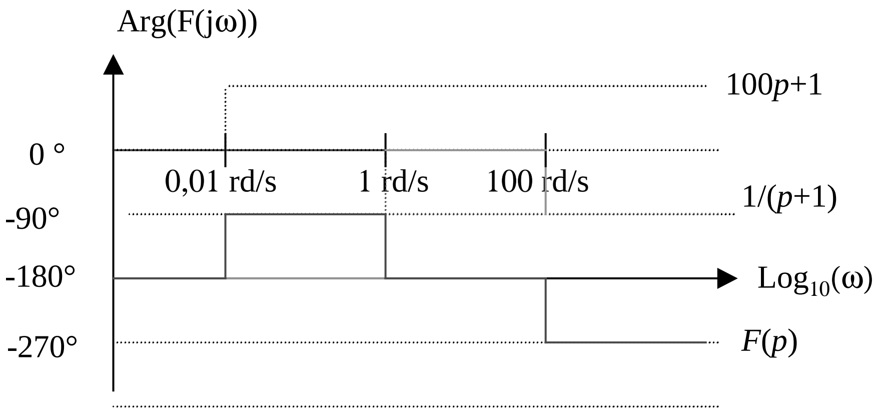
Devoir surveillé d'automatique
Systèmes asservis linéaires
Correction

Exercice n°1 : Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude et en phase de la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{-0{,}1 \cdot (100p+1)}{(p+1)(0{,}01p+1)}$$

Le gain statique du système (pour p = jω = 0) est de –0.1. On a donc un gain statique de –20 dB et un déphasage de –180°.





b) L'entrée $x(t)$ est un Dirac, sa transformée de Laplace est donc 1. La transformée de Laplace $Y(p)$ de la sortie $y(t)$ du filtre est donc $Y(p)=F(p)$. On utilise le théorème de la valeur initiale pour obtenir la valeur initiale de $f(t)$.

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{p\to +\infty} pY(p) = \lim_{p\to +\infty} p\frac{-0{,}1\cdot(100p+1)}{(p+1)(0{,}01p+1)} = -1000$$

c) L'entrée du filtre est un échelon de transformée de Laplace $1/p$. La transformée de Laplace $Y(p)$ de la sortie du filtre $y(t)$ est donc $F(p)/p$. On utilise le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pY(p) = \lim_{p\to 0} \frac{-0{,}1\cdot(100p+1)}{(p+1)(0{,}01p+1)} = -0{,}1$$

Exercice n°2 :

La transformée de l'équation différentielle $5\cdot\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = (4te^{-2t} + e^{-2t} + 1)u(t)$ donne :

$$5\cdot(pX(p) - x(0)) + X(p) = 2L(te^{-2t}) + L(e^{-2t}) + L(1)$$

$$X(p)(5p+1) = 4\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p+2}\right) + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p} - 5x(0)$$

$$X(p) = \frac{1}{5p+1}\left[\frac{-4}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p} + 20\right]$$

Exercice n°3 : Inverser (transformée de Laplace inverse) la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{p-1}{p(p+1)^2} = \frac{a}{p} + \frac{b}{(p+1)^2} + \frac{c}{(p+1)}$$

avec $a = pF(p)\big|_{p=0} = \left.\frac{p-1}{(p+1)^2}\right|_{p=0} = -1$

$$b = (p+1)^2 F(p)\big|_{p=-1} = \left.\frac{p-1}{p}\right|_{p=-2} = 2$$

$$c = \frac{d}{dp}\left((p+1)^2 F(p)\right)\Big|_{p=-1} = \frac{d}{dp}\left.\left(\frac{p-1}{p}\right)\right|_{p=-1} = \left.\frac{1}{p^2}\right|_{p=-1} = 1$$

La solution temporelle est donc : $f(t) = ((1+2t)e^{-t} - 1)u(t)$

Exercice n°4 : On considère le système de fonction de transfert $G(p) = \frac{5p-1}{12p^3 + p^2 + 2p + 1}$, le diagramme de Nyquist de ce système est donné en annexe.

a) Pour déterminer la stabilité du système en boucle ouverte, on utilise le critère de Routh. Le tableau donne :

p^3	12	2
p^2	1	1

p^1	(1x2-12x1)/1 = -10	0
p^0	(-10x1 – 1x0)/-10 = 1	0

Il y a donc deux changements de signes dans la première colonne du tableau de Routh. On en déduit que le système possède deux pôles à partie réelle positive : il est donc instable en boucle ouverte.

b) D’après la question précédente, le système possède deux pôles dans le demi plan de droite.

c) Le système ayant deux pôles dans le demi plan de droite, la stabilité du système est assuré si le lieu de Nyquist entoure deux fois dans le sens inverse des aiguilles d’une montre le point –1. D’après le lieu de Nyquist donnée en annexe, cette condition est vérifiée si et seulement si le gain K du système est compris en 1/1,69 = 0,59 et 1.

Exercice n° 5 : On considère un système G(p) dont on connaît le diagramme de Black (voir annexe).

a) D’après le lieu de Black, le système possède un intégrateur (le déphasage tend vers –90° quand ω tend vers 0 et le gain vers plus l’infinie). La réponse du système à un échelon en boucle ouverte donnera donc, après un transitoire, une rampe.

b) Par lecture sur la courbe, on obtient une marge de gain de 10 dB, et la marge de phase de 18°.

c) Le système possédant un intégrateur, l’erreur statique en boucle fermée sera nulle. La lecture de l’abaque de Black-Nichols permet aussi de retrouver ce résultat.

d) Le gain statique M_0 est de 0 dB, le gain maximum M_{max} est de 8 dB pour une fréquence de résonance ω_R =1,72 rd/s. On en déduit que le facteur de suroscillation du système en boucle fermée est de : $M = M_{max}-M_0$ = 8dB.

Le facteur ξ équivalent, d’après la lecture des abaques est de ξ =0,2. On en déduit que la fréquence propre ω_n du deuxième ordre équivalent est de ω_R /0,96 = 1,81 rd/s.

On en déduit :

le temps de pic tpic = 3,2/1.81 = 1,76 secondes
le temps de réponse = 15/1.81 = 8,3 secondes
le nombre d’oscillation avant établissement à +-5% : N = $1/2\xi$ = 2,5
la valeur maximale du dépassement : D = 53 %

A partir de toutes ces informations, le tracé de l’allure de la réponse ne pose pas de réels problèmes.

e) Pour ramener la marge de gain à 15 dB, il faut réduire le gain du système de 5 dB.
Pour ramener la marge de phase à 50°, il faut réduire le gain de 15 dB (gain du système pour un déphasage de –130°). Pour avoir les deux, il faut donc prendre la condition la plus contraignante, c’est-à-dire diminuer le gain de 15 dB.
$K = 10^{-15/20} = 0,18$.

f) L'inconvéniant de cette solution est qu'elle diminue la fréquence propre du deuxième ordre équivalent, et donc, augmente le temps de réponse du système.

g) Pour ramener la marge de phase à 50°, il faut diminuer la phase de 32° pour la fréquence ω_R=1,72 rd/s.

On en déduit le filtre correcteur $C(p) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1 + a \cdot T \cdot p}{1 + T \cdot p}$, avec $\Phi_{\max} = 32° = \arcsin(\frac{a-1}{a+1})$ soit a=4 et $\omega_{\max} = 1{,}72 = \frac{1}{T \cdot \sqrt{a}}$ soit $T = \frac{1}{1{,}72 \cdot \sqrt{4}}$ = 2 secondes

Pour que l'erreur de poursuite soit nulle en boucle fermée, il faut que le système possède deux intégrateurs. Il faut donc en ajouter un autre dans la chaîne directe.

Pour ne pas que ce nouvel intégrateur dégrade la stabilité du système, on le remplace par un correcteur PI de la forme $PI(p) = 1 + \frac{1}{T_i p}$. Il faut que pour $\omega > \omega_R$=1,72rd/s, le terme intégral soit négligeable devant le terme proportionnel, soit :

$\frac{1}{T_i \omega_R} << 1$, soit $T_i = \frac{1}{10\omega_R} = 0{,}56\ s$ si on ce place une décade en dessous de la fréquence de résonance.

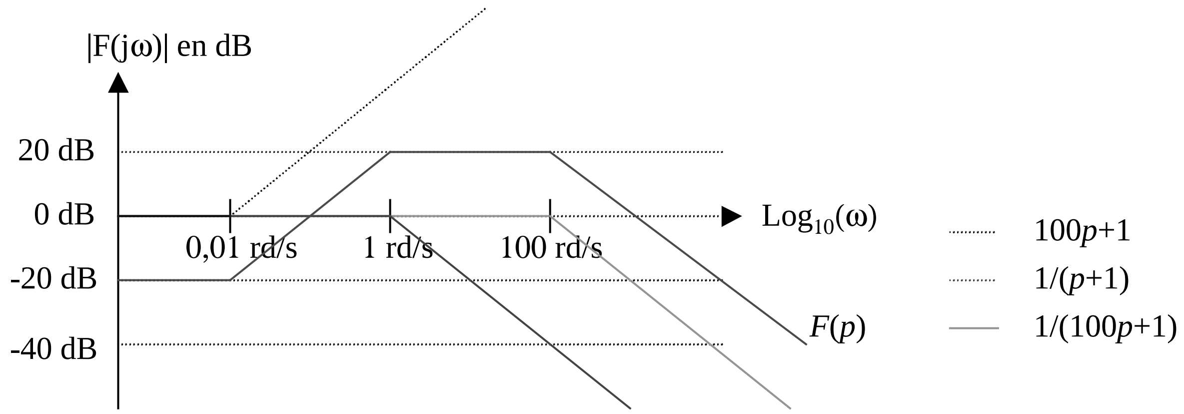
I.U.P. Lorient **avril 2001**
Licence GEII **Emmanuel Boutillon**

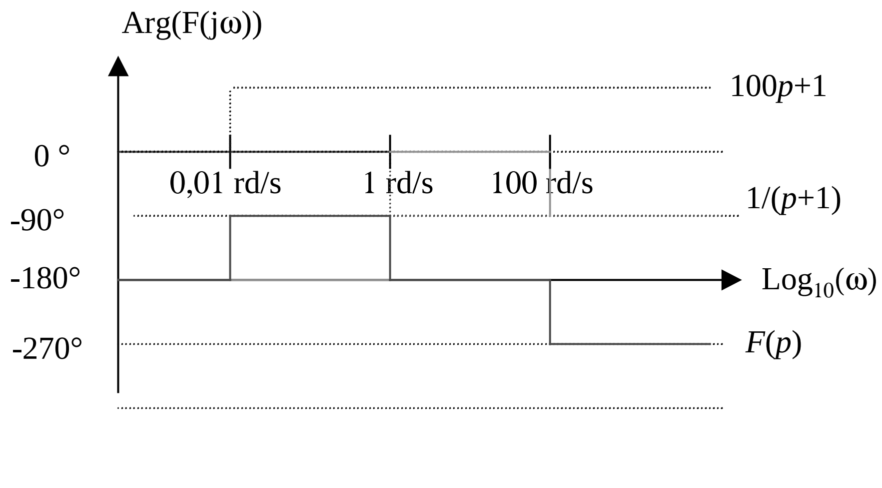
Devoir surveillé d'automatique
Systèmes asservis linéaires
Correction

Exercice n°1 : Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude et en phase de la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{-0{,}1 \cdot (100p + 1)}{(p+1)(0{,}01p+1)}$$

Le gain statique du système (pour p = jω = 0) est de –0.1. On a donc un gain statique de –20 dB et un déphasage de –180°.





b) L'entrée *x*(*t*) est un Dirac, sa transformée de Laplace est donc 1. La transformée de Laplace *Y*(*p*) de la sortie *y*(*t*) du filtre est donc *Y*(*p*)=*F*(*p*). On utilise le théorème de la valeur initiale pour obtenir la valeur initiale de *f*(*t*).

$$\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{p\to+\infty} pY(p) = \lim_{p\to+\infty} p\frac{-0{,}1\cdot(100p+1)}{(p+1)(0{,}01p+1)} = -1000$$

c) L'entrée du filtre est un échelon de transformée de Laplace 1/*p*. La transformée de Laplace *Y*(*p*) de la sortie du filtre y(*t*) est donc *F*(*p*)/*p*. On utilise le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pY(p) = \lim_{p\to 0} \frac{-0{,}1\cdot(100p+1)}{(p+1)(0{,}01p+1)} = -0{,}1$$

Exercice n°2 :

La transformée de l'équation différentielle $5\cdot\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = (4te^{-2t} + e^{-2t} + 1)u(t)$ donne :

$$5\cdot(pX(p) - x(0)) + X(p) = 2L(te^{-2t}) + L(e^{-2t}) + L(1)$$

$$X(p)(5p+1) = 4(-1)\frac{d}{dp}(\frac{1}{p+2}) + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p} - 5x(0)$$

$$X(p) = \frac{1}{5p+1}\left[\frac{4}{(p+2)^2} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p} + 20\right]$$

Exercice n°3 : Inverser (transformée de Laplace inverse) la fonction de transfert suivante :

$$F\ (p) = \frac{p-1}{p(p+1)^2} = \frac{a}{p} + \frac{b}{(p+1)^2} + \frac{c}{(p+1)}$$

avec $a = pF(p)\big|_{p=0} = \left.\frac{p-1}{(p+1)^2}\right|_{p=0} = -1$

$$b = (p+1)^2 F(p)\big|_{p=-1} = \left.\frac{p-1}{p}\right|_{p=-2} = 2$$

$$c = \frac{d}{dp}\left((p+1)^2 F(p)\right)\Big|_{p=-1} = \frac{d}{dp}\left.\left(\frac{p-1}{p}\right)\right|_{p=-1} = \left.\frac{1}{p^2}\right|_{p=-1} = 1$$

On en déduit l'expression temporelle par les tables de transformée inverse :

$$f(t) = -1 + e^{-t}(2t+1)$$

Exercice n°4 : On considère le système de fonction de transfert $G(p) = \frac{5p-1}{12p^3 + p^2 + 2p + 1}$,

le diagramme de Nyquist de ce système est donné en annexe.

b) Pour déterminer la stabilité du système en boucle ouverte, on utilise le critère de Routh. Le tableau donne :

p^3	12	2
p^2	1	1
p^1	(1x2-12x1)/1 = -10	0
p^0	(-10x1 – 1x0)/-10 = 1	0

Il y a donc deux changements de signes dans la première colonne du tableau de Routh. On en déduit que le système possède deux pôles à partie réelle positive : il est donc instable en boucle ouverte.

b) D'après la question précédente, le système possède deux pôles dans le demi plan de droite.

c) Le système ayant deux pôles dans le demi plan de droite, la stabilité du système est assuré si le lieu de Nyquist entoure deux fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre le point –1. D'après le lieu de Nyquist donnée en annexe, cette condition est vérifiée si et seulement si le gain K du système est compris en 1/1,69 = 0,59 et 1.

Exercice n° 5 : On considère un système G(p) dont on connaît le diagramme de Black (voir annexe).

a) D'après le lieu de Black, le système possède un intégrateur (le déphasage tend vers –90° quand ω tend vers 0 et le gain vers plus l'infinie). La réponse du système à un échelon en boucle ouverte donnera donc, après un transitoire, une rampe.

b) Par lecture sur la courbe, on obtient une marge de gain de 10 dB, et la marge de phase de 18°.

c) Le système possédant un intégrateur, l'erreur statique en boucle fermée sera nulle. La lecture de l'abaque de Black-Nichols permet aussi de retrouver ce résultat.

d) Le gain statique M_0 est de 0 dB, le gain maximum M_{max} est de 8 dB pour une fréquence de résonance ω_R =1,72 rd/s. On en déduit que le facteur de suroscillation du système en boucle fermée est de : $M = M_{max}-M_0$ = 8dB.

Le facteur ξ équivalent, d'après la lecture des abaques est de ξ =0,2. On en déduit que la fréquence propre ω_n du deuxième ordre équivalent est de ω_R /0,96 = 1,81 rd/s.

On en déduit :

le temps de pic tpic = 3,2/1.81 = 1,76 secondes
le temps de réponse = 15/1.81 = 8,3 secondes
le nombre d'oscillation avant établissement à +-5% : N = 1/2ξ = 2,5
la valeur maximale du dépassement : D = 53 %

A partir de toutes ces informations, le tracé de l'allure de la réponse ne pose pas de réels problèmes.

e) Pour ramener la marge de gain à 15 dB, il faut réduire le gain du système de 5 dB.
Pour ramener la marge de phase à 50°, il faut réduire le gain de 15 dB (gain du système pour un déphasage de –130°). Pour avoir les deux, il faut donc prendre la condition la plus contraignante, c'est-à-dire diminuer le gain de 15 dB.
$K = 10^{-15/20}$ = 0,18.

f) L'inconvéniant de cette solution est qu'elle diminue la fréquence propre du deuxième ordre équivalent, et donc, augmente le temps de réponse du système.

g) Pour ramener la marge de phase à 50°, il faut diminuer la phase de 32° pour la fréquence ω_R=1,72 rd/s.

On en déduit le filtre correcteur $C(p) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1 + a \cdot T \cdot p}{1 + T \cdot p}$, avec $\Phi_{\max} = 32° = \arcsin(\frac{a-1}{a+1})$ soit a=4 et $\omega_{\max} = 1{,}72 = \frac{1}{T \cdot \sqrt{a}}$ soit $T = \frac{1}{1{,}72 \cdot \sqrt{4}}$ = 2 secondes

Pour que l'erreur de poursuite soit nulle en boucle fermée, il faut que le système possède deux intégrateurs. Il faut donc en ajouter un autre dans la chaîne directe.

Pour ne pas que ce nouvel intégrateur dégrade la stabilité du système, on le remplace par un correcteur PI de la forme $PI(p) = 1 + \frac{1}{T_i p}$. Il faut que pour $\omega > \omega_R$=1,72rd/s, le terme intégral soit négligeable devant le terme proportionnel, soit :

$\frac{1}{T_i \omega_R} << 1$, soit $T_i = \frac{1}{10\omega_R} = 0{,}56\, s$ si on ce place une décade en dessous de la fréquence de résonance.
