

# Non-binary LDPC codes associated to high-order modulations

**Ahmed ABDMOULEH**

**Directeurs de thèse** : Emmanuel BOUTILLON et Catherine DOUILLARD

**Encadrants** : Charbel ABDEL NOUR et Laura CONDE-CANENCIA



# Plan de la présentation

- 1. Contexte de la thèse.***
- 2. Optimisation de la diversité de constellation.***
- 3. Optimisation conjointe des codes LDPC non binaires et des modulations d'ordre élevé.***
- 4. Conclusion et perspectives.***



# Plan de la présentation

- 1. Contexte de la thèse.**
- 2. Optimisation de la diversité de constellation.*
- 3. Optimisation conjointe des codes LDPC non binaires et des modulations d'ordre élevé.*
- 4. Conclusion et perspectives.*

# Contexte général

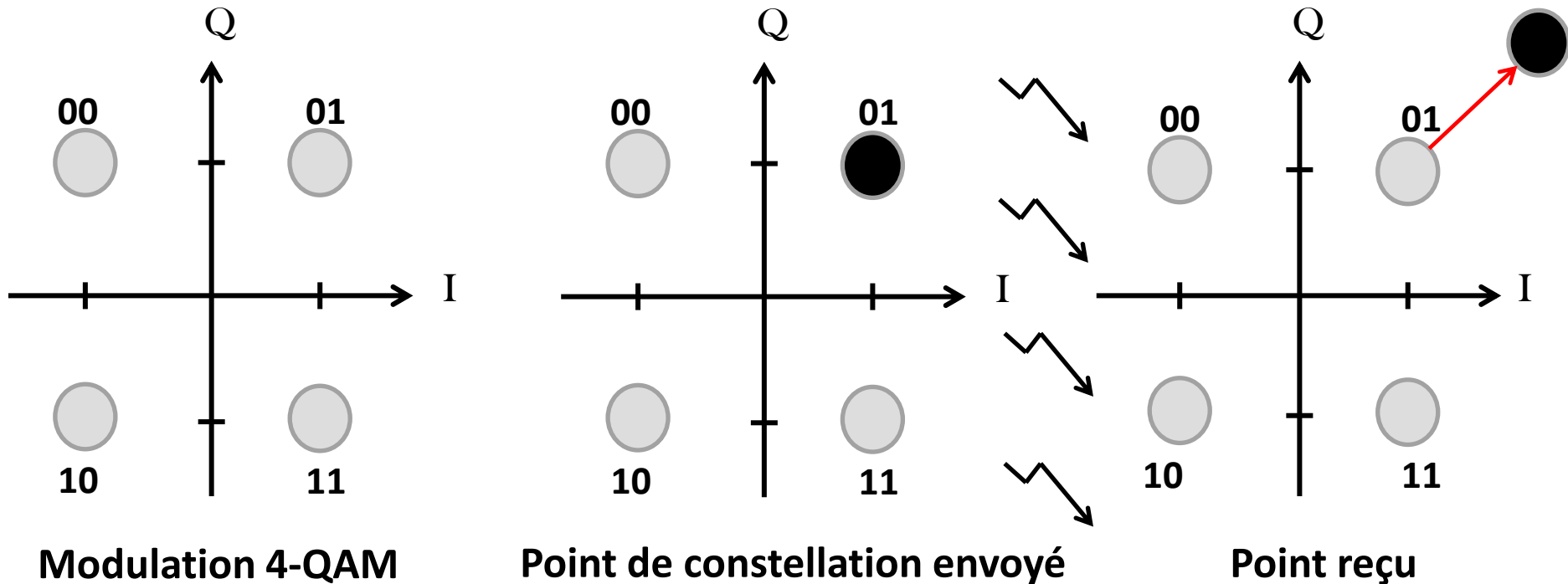
- Volume de données important.
- Nombre croissant d'appareils connectés.
- Un réseau hyper interconnecté.
- Ressources spectrales limitées.



➤ **Augmenter l'efficacité spectrale.**

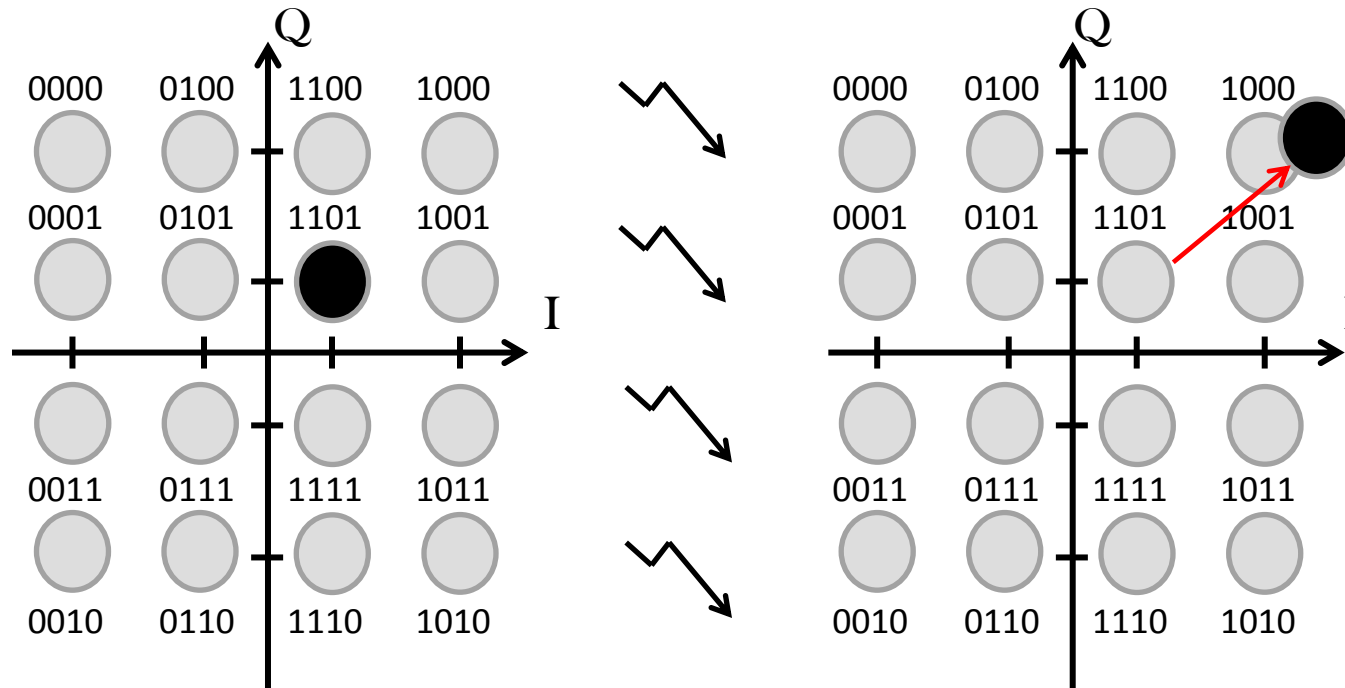
# Augmenter l'efficacité spectrale

- Augmenter l'efficacité spectrale : envoyer «  $m$  » bits par transmission.
  - **Modulations d'ordre élevé.**
- Exemple : Modulation **4-QAM**-> envoi de  **$m=2$  bits** simultanément.



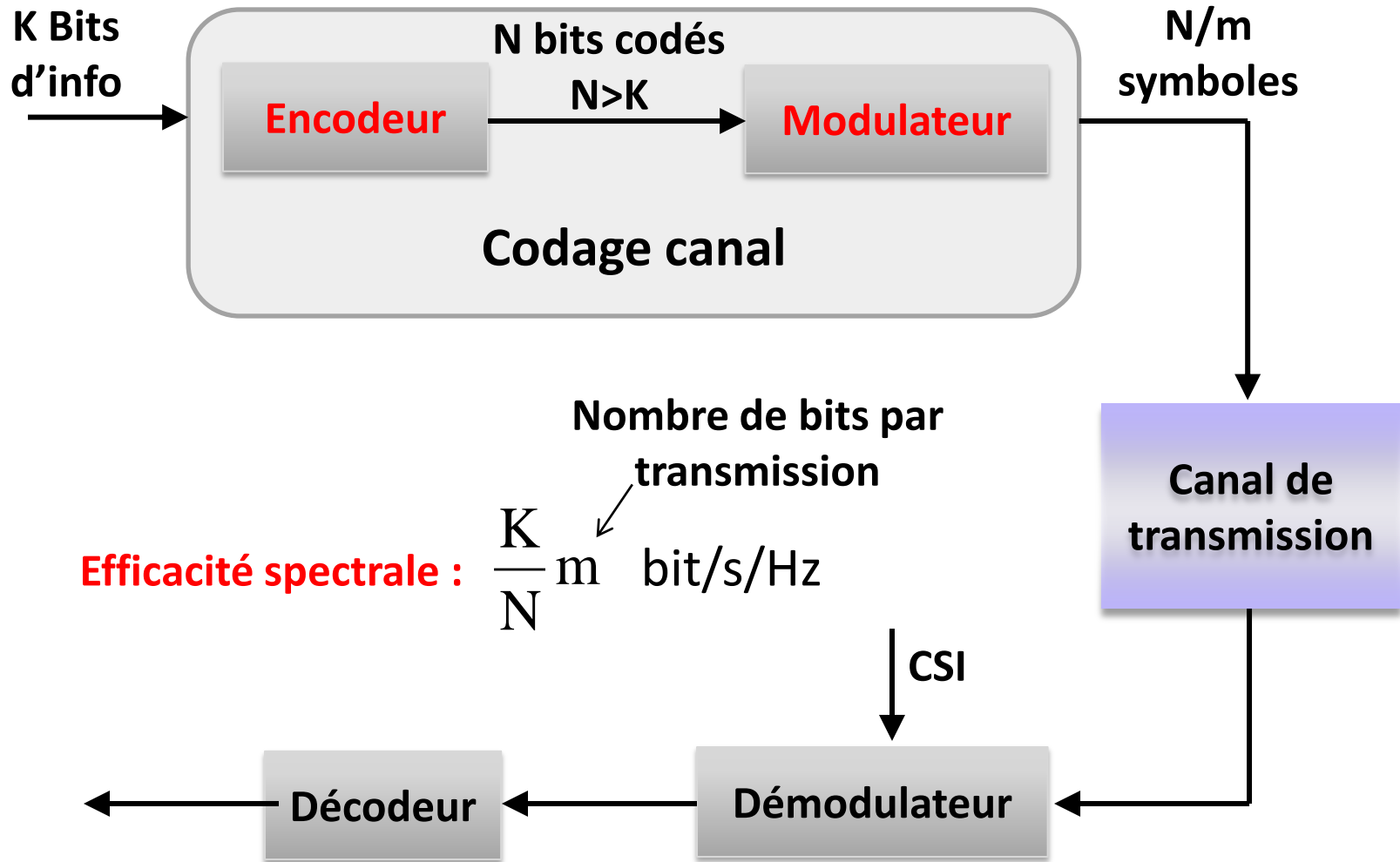
➤ **Bruit** du canal -> Le point envoyé est dévié.

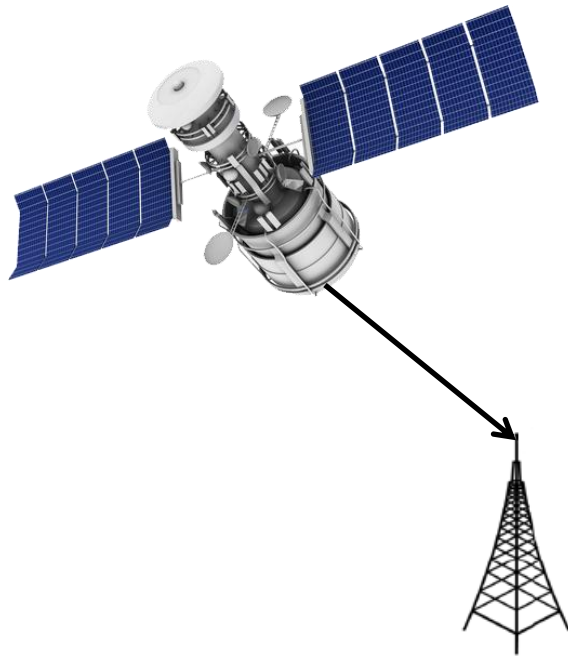
# Augmenter l'efficacité spectrale



- Modulation 16-QAM -> **m=4** bits transmis par utilisation canal -> système plus efficace.
- Bruit de canal plus influent-> plus d'erreurs
- **Besoin de code correcteur d'erreurs efficace.**

# Schéma de transmission



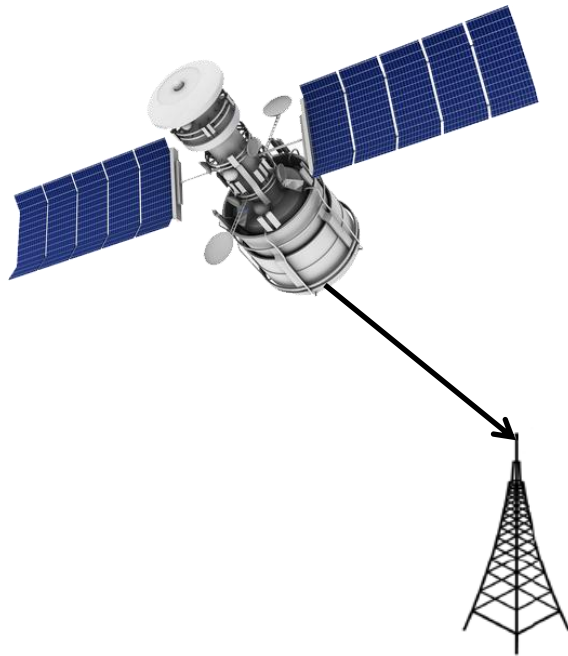


**Canal Gaussien**

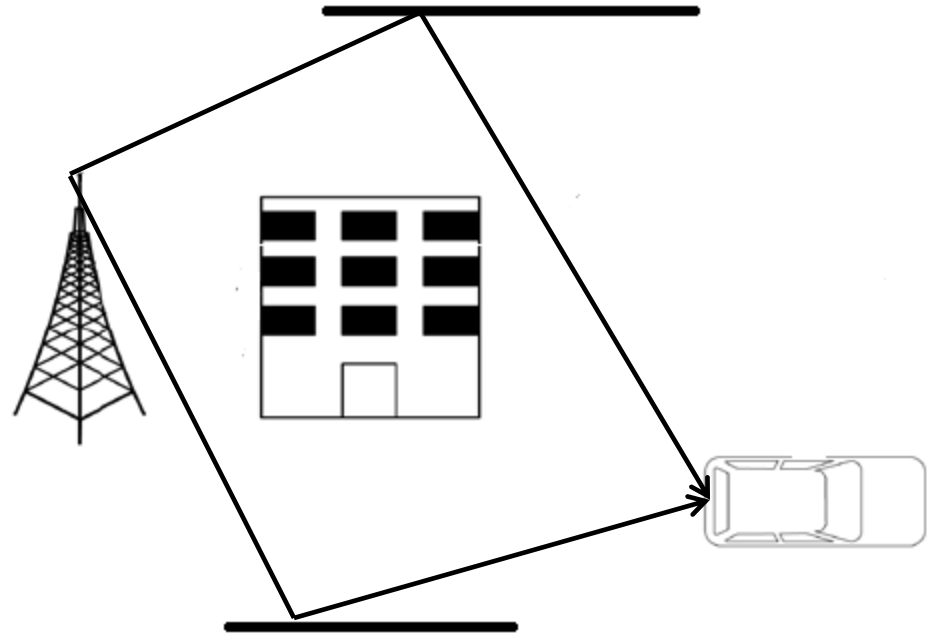
$$Y = X + W$$

**Diffusion point à point**

# Canal de transmission



**Canal Gaussien**

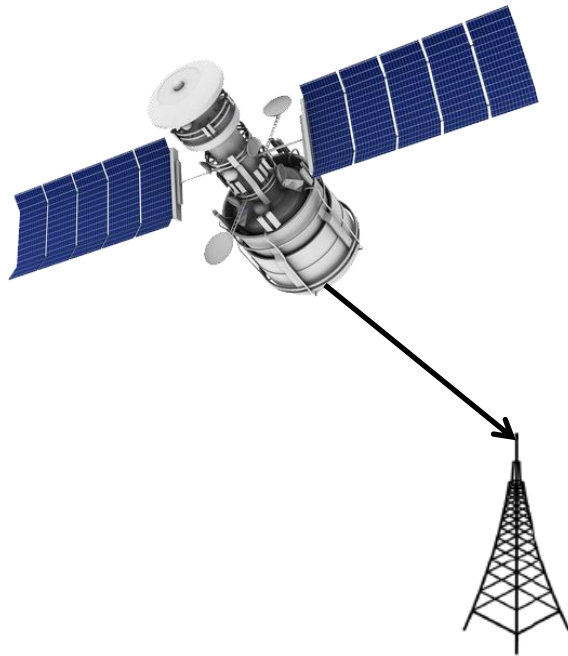


**Canal de Rayleigh**

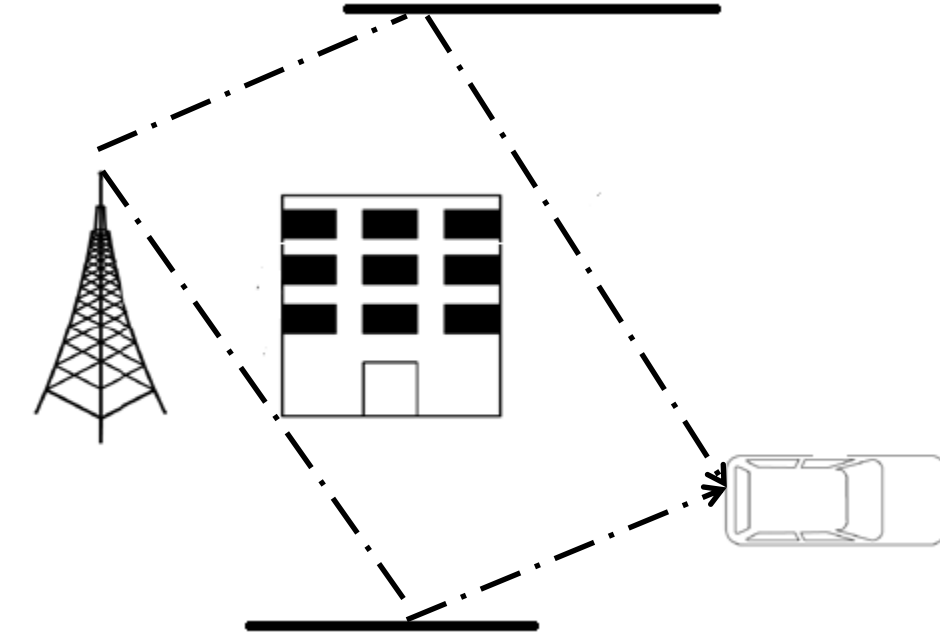
$$Y = \rho X + W$$

❖ Diffusion terrestre

# Canal de transmission



**Canal Gaussien**



$$Y = e\rho X + W$$

$$e \in \{0, 1\}$$

**Canal de Rayleigh avec effacement.**

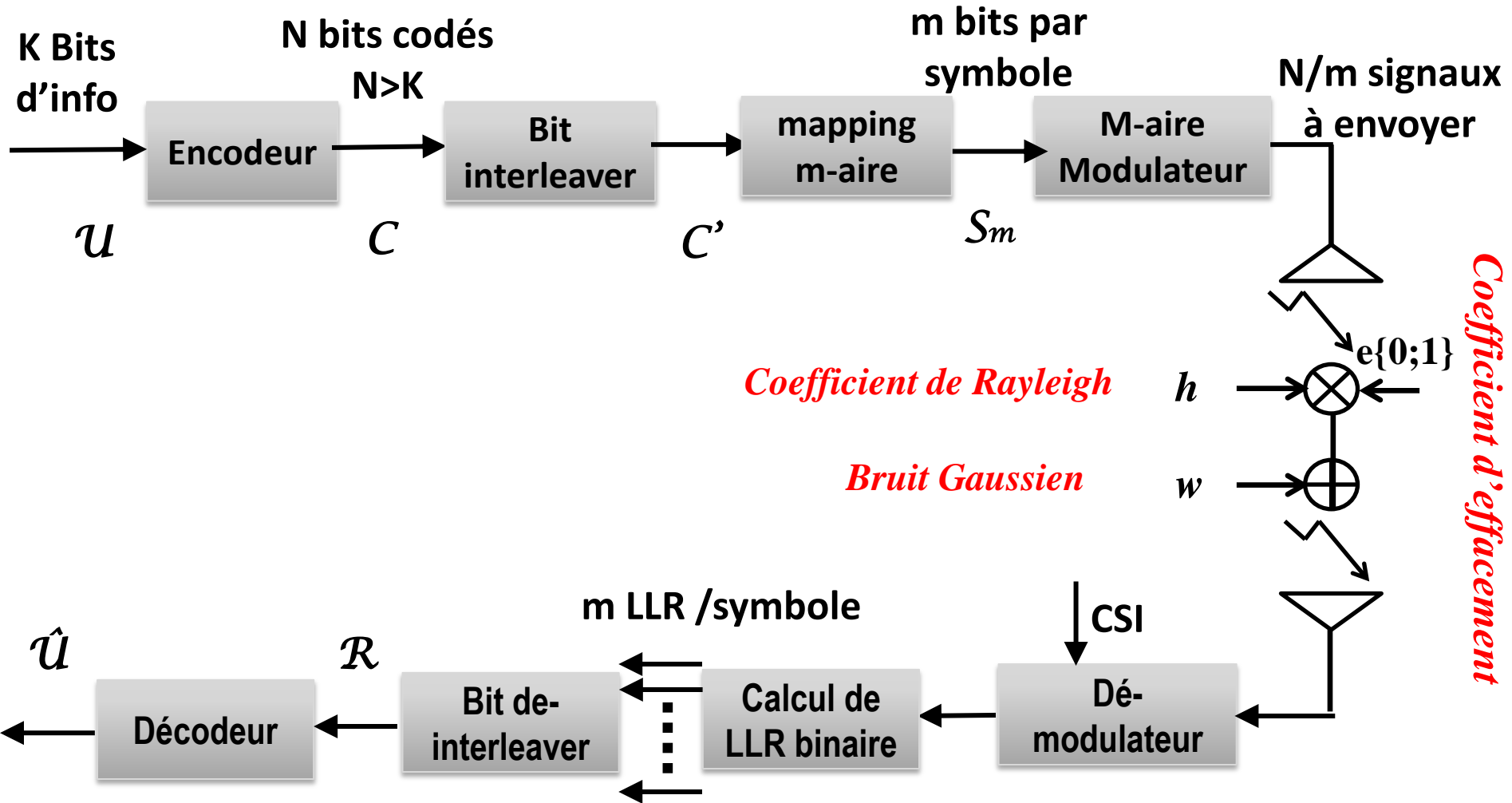


# Schéma de codage

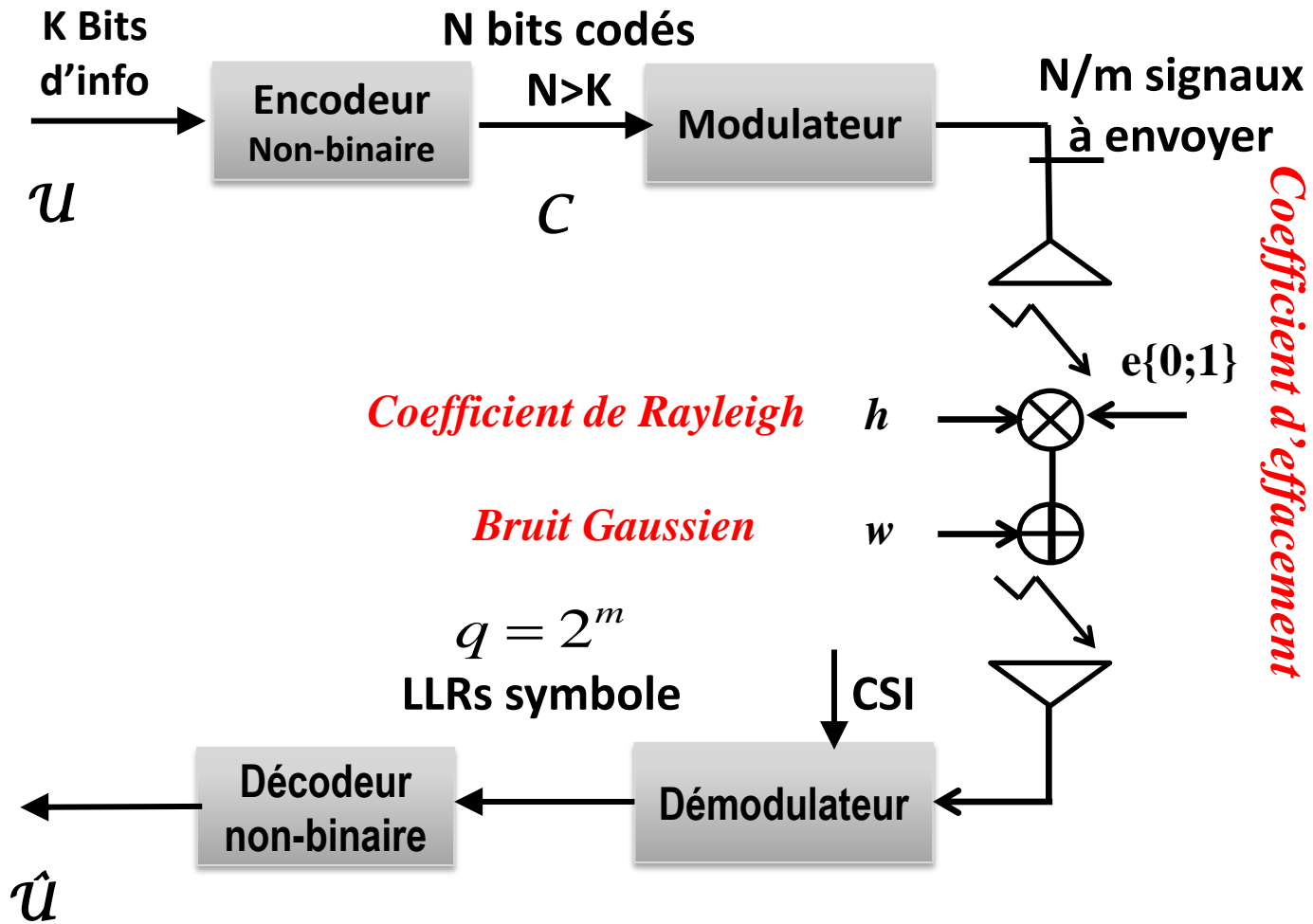
## Deux schémas de codage possibles.

- **Bit-interleaved coded modulation (BICM).**
  - Association de code correcteur d'erreur **binaire** et d'une modulation **non-binaire**. (LDPC + Entrelaceur + modulation non binaire)
  
- **Coded modulation (CM).**
  - Association de code correcteur d'erreur **non-binaire** et d'une modulation **non-binaire**. (LDPC-NB + modulation non binaire)

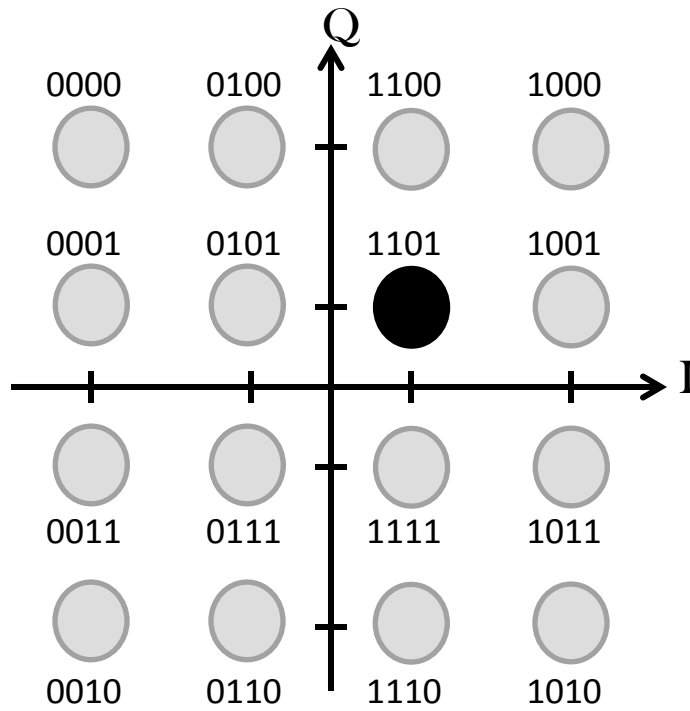
# Bit-interleaved coded modulation



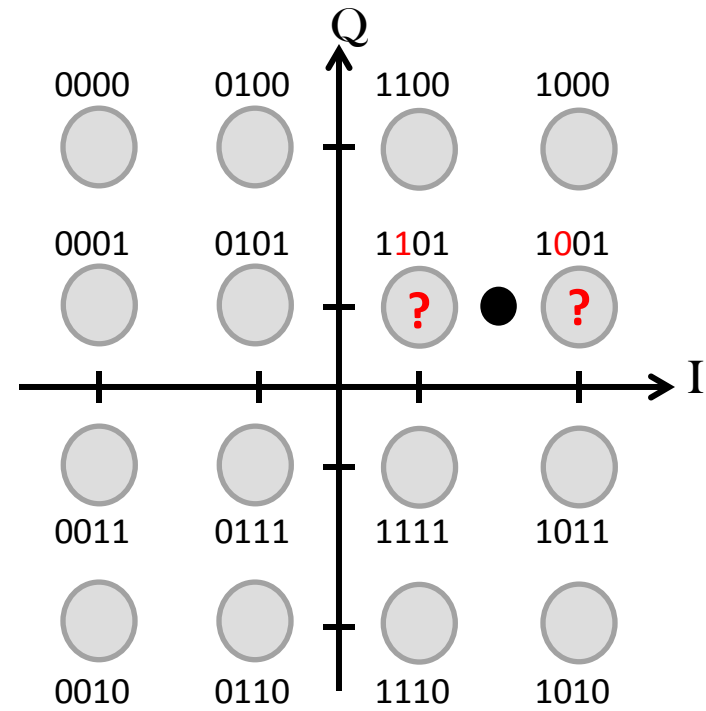
# Coded modulation



# Capacité de transmission



4 bits d'information envoyés.

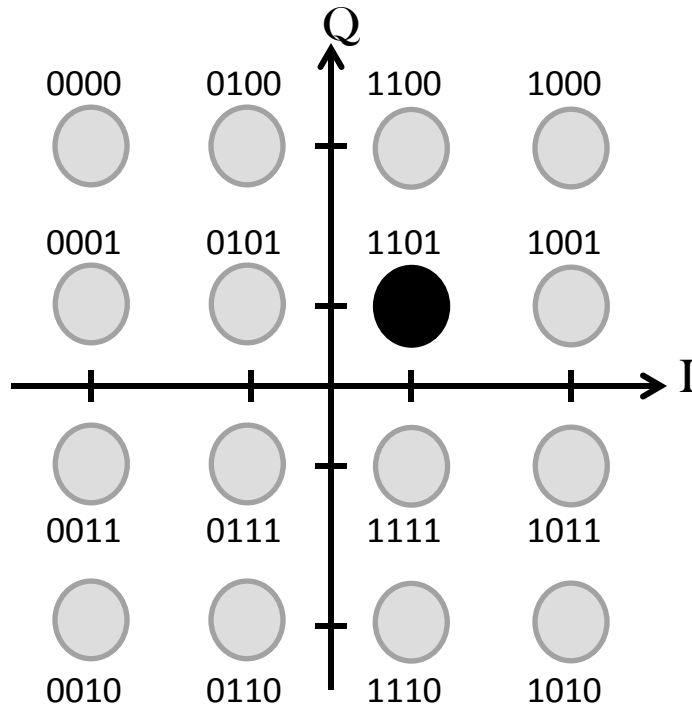


1 bit d'incertitude.

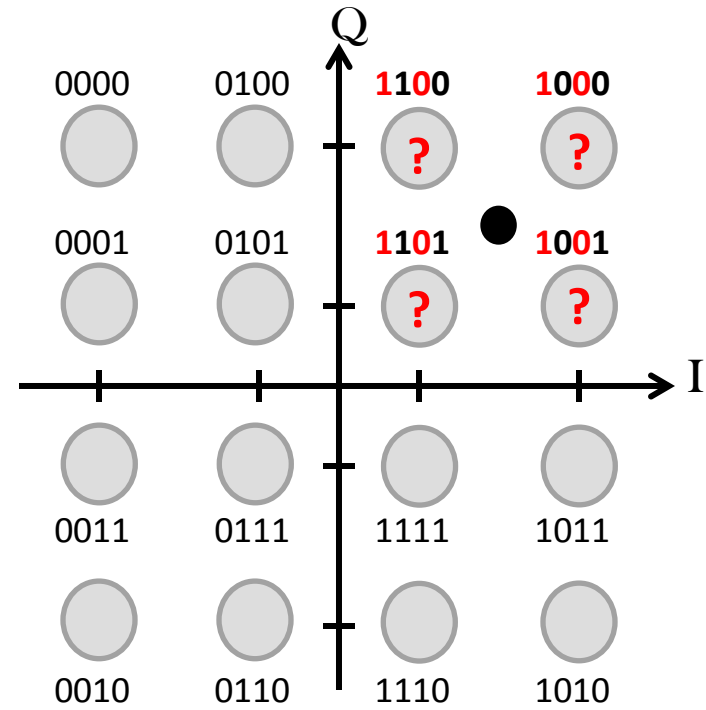
➤ 3 bits transmis.



# Capacité de transmission



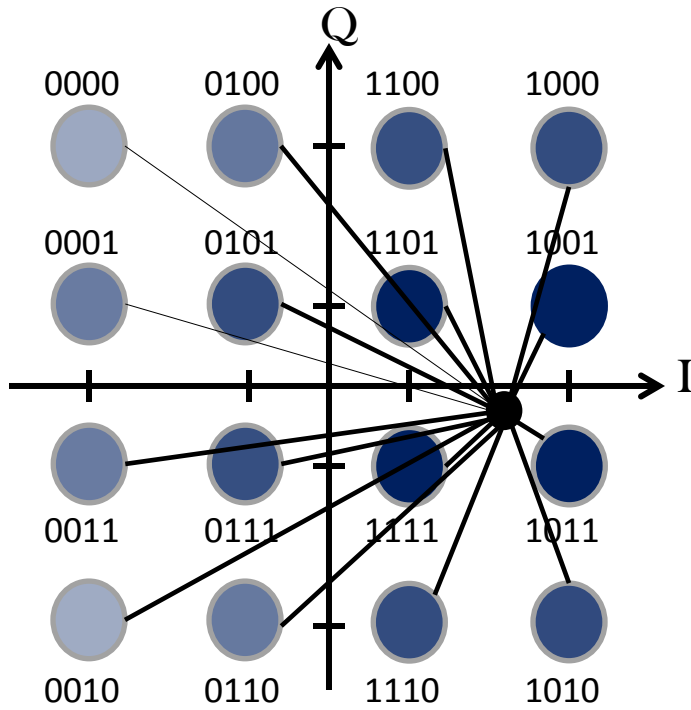
4 bits d'information envoyés.



2 bits d'incertitude.

➤ 2 bits transmis.

# Capacité de transmission



- Pour un point  $y$  reçu, l'incertitude sur  $X$  est donnée par l'entropie

$$H(X \setminus y)$$

- La quantité d'information envoyée :

$$I(X; y) = m - H(X \setminus y)$$

- L'**information mutuelle** moyenne :

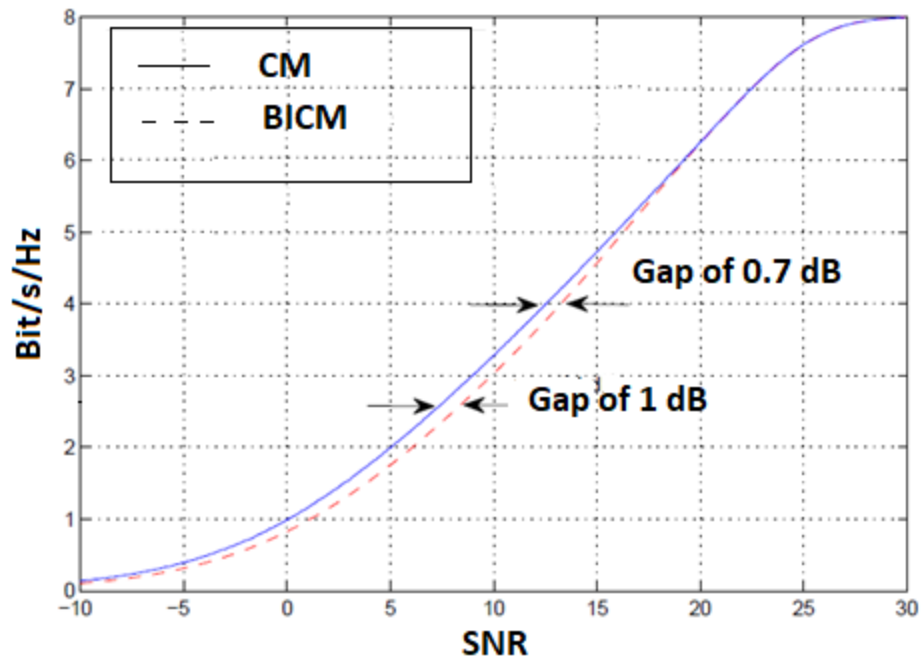
$$I(X; Y) = m - E[H(X \setminus y)]$$

- Évaluée par simulation de Monte Carlo.

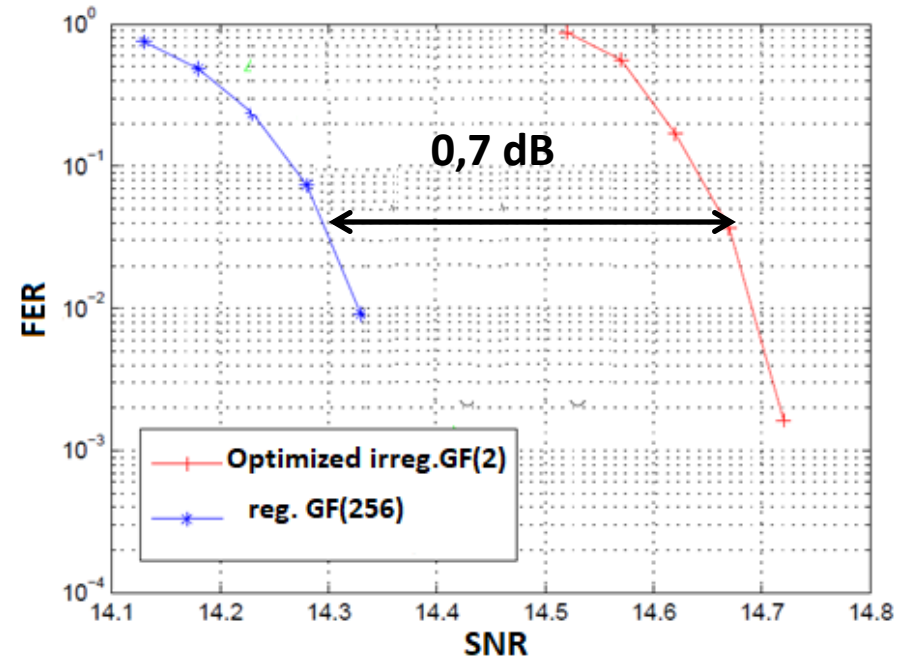
- La **capacité de canal** est la limite théorique absolue, appelée limite de Shannon. Elle est définie par:  $C = \max_X I(X; Y)$

# Information mutuelle et performances

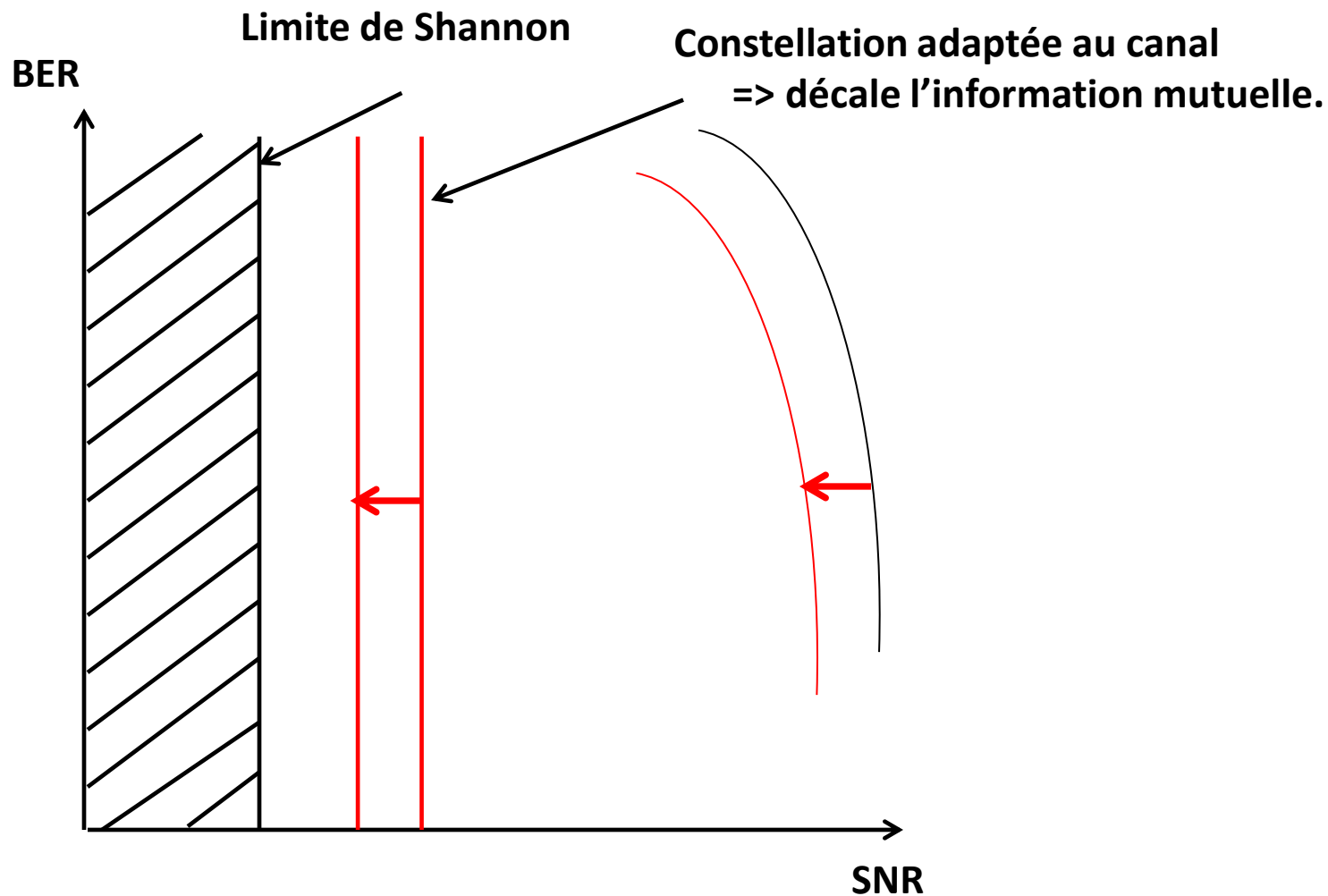
Les courbes d'information mutuelle : CM et la BICM, 256-QAM et canal Gaussien.



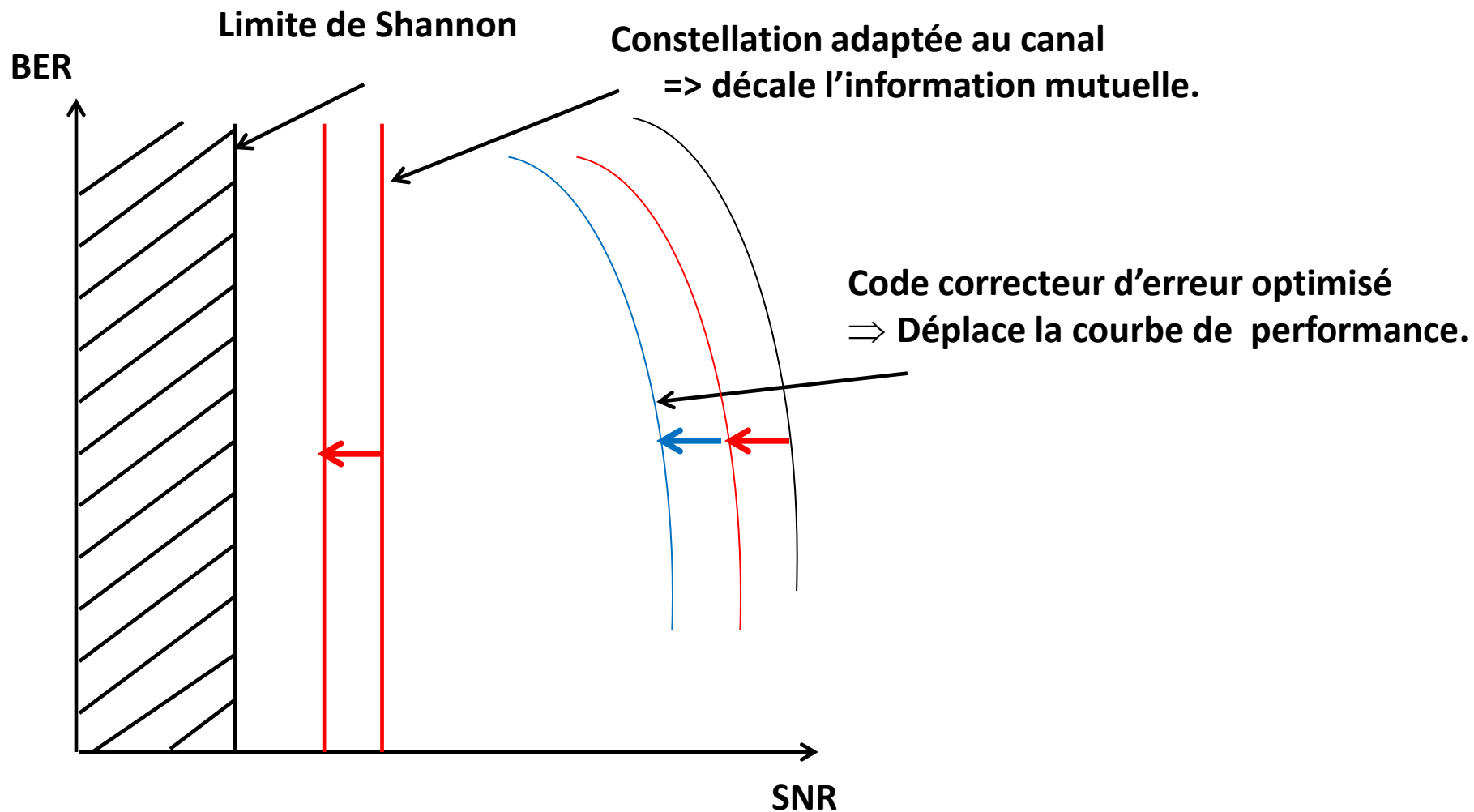
Courbes de décodage : Codes LDPC Vs codes LDPC-NB- GF(256), rendement 1/2, 64000 bits, canal Gaussien,



# Comment améliorer les performances?



# Comment améliorer les performances?





# Problématiques

Peu d'études concernent les avantages de l'association des **codes non binaires et des modulations non binaires**.

Quels avantages présente le schéma de transmission en **modulation codée** ?

Comment améliorer les **modulations codées** ?



# Plan de la présentation

1. *Contexte de la thèse*
2. ***Optimisation de la diversité de constellation***
3. *Optimisation conjointe des codes LDPC non binaires et des modulations d'ordre élevé.*
4. *Conclusion et perspectives*

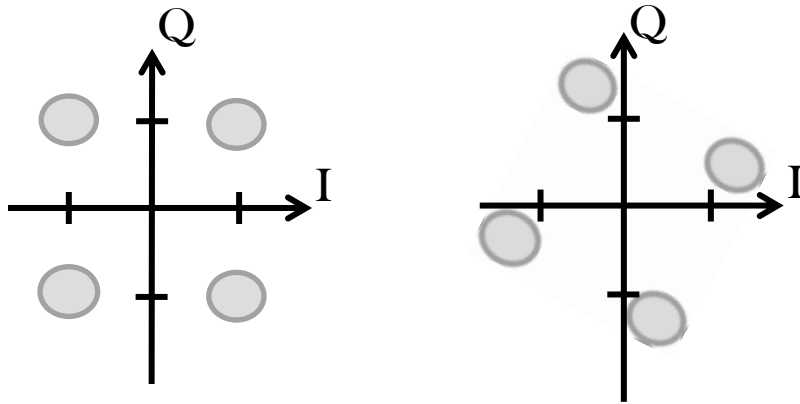
# Diversité de constellation (Signal Space Diversity)

- La diversité de constellation est une forme de diversité qui s'intéresse à la partie modulation (Signal Space Diversity).
- C'est une technique innovante introduite dans la norme DVB-T2.



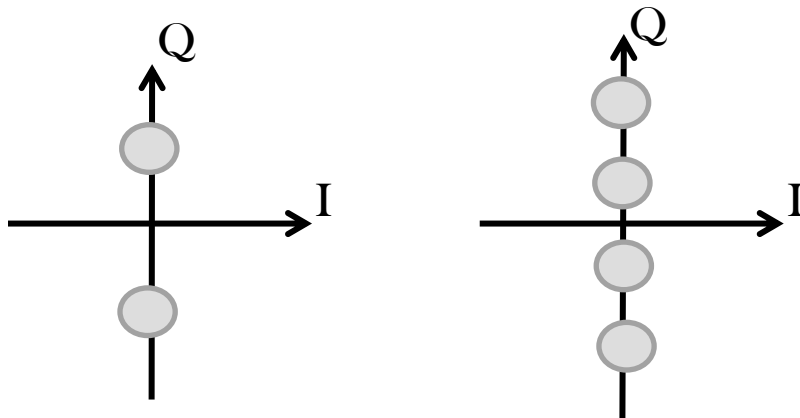
- Deux points clés sont nécessaires pour une bonne application de cette technique de diversité.
  1. Rotation de la constellation.
  2. Entrelacement entre I et Q.

# Diversité de constellation (Signal Space Diversity)



**Rotation de la constellation.**

Corréler l'information portée par les composantes (I) et (Q).



Effacement de I

**Entrelacement entre I et Q.**

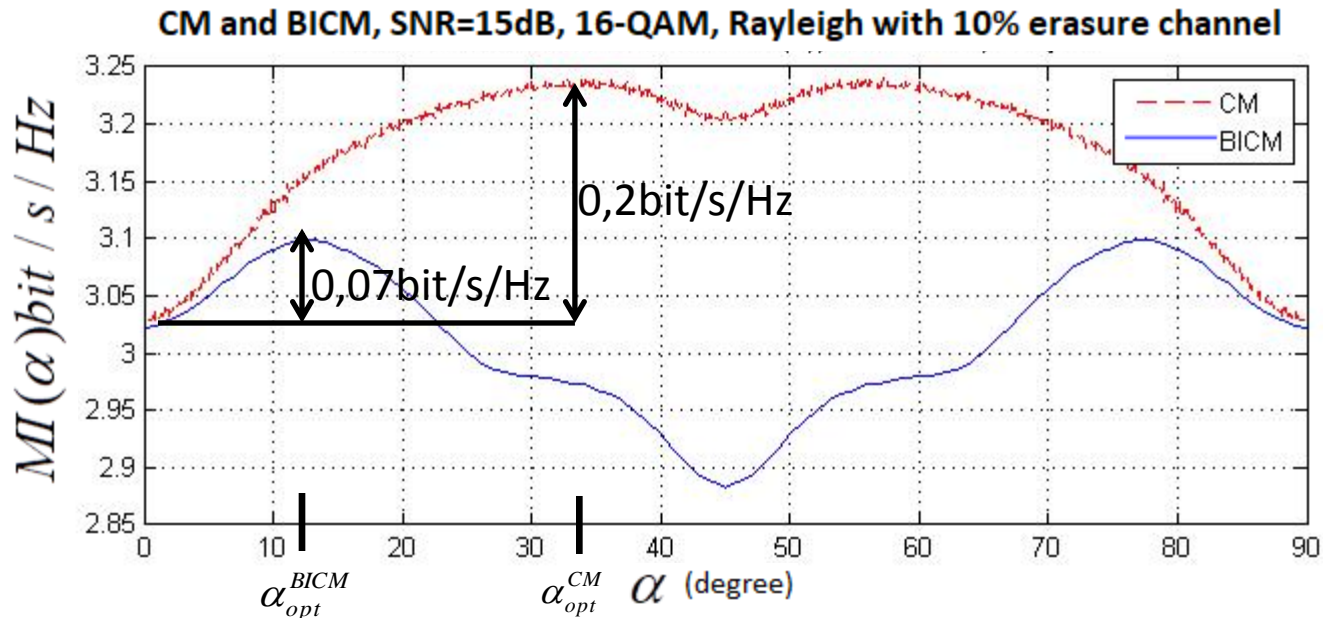
Evanouissement et/ou effacement indépendant entre (I) et (Q).

- Plus de **diversité** en appliquant la **rotation** et l'**entrelacement** des composants (I) et (Q)

# Optimisation de la diversité de constellation

- Paramètre à optimiser : **angle de rotation.**
- Nombreuses méthodes d'optimisation :
  - Minimiser le FER ( $\Rightarrow$  simulation)
  - Un compromis entre la distance de Hamming et la distance produit de la constellation initiale et de ses projections sur I et Q.
- On propose de déterminer l'angle de rotation par une optimisation de l'information mutuelle.  
  
➔ **Maximiser l'information mutuelle.**

# L'IM en fonction de l'angle de rotation



$\alpha$

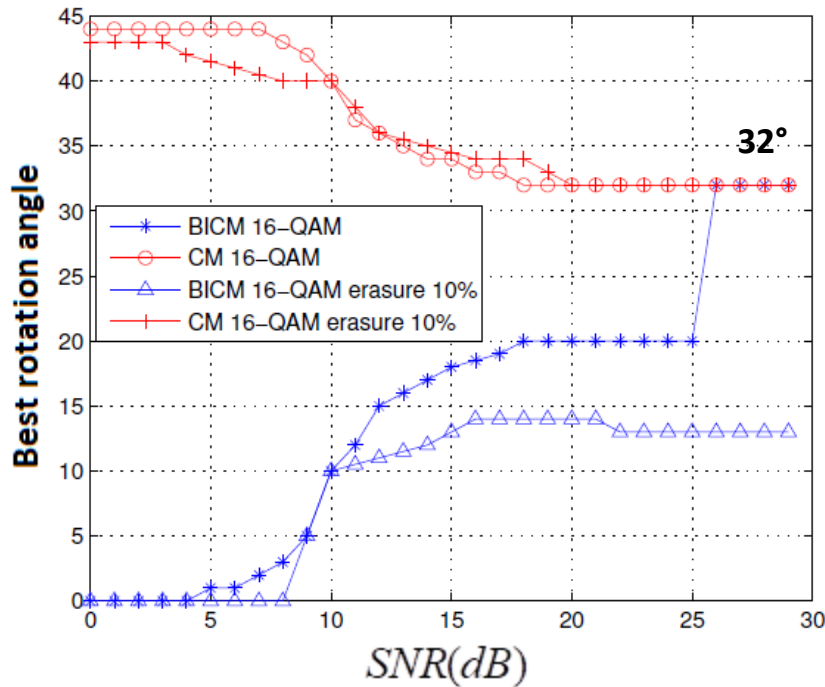
$$MI_{SNR}^{CM}(\alpha) = I_{CM}(X;Y)$$

$$MI_{SNR}^{BICM}(\alpha) = I_{BICM}(X;Y)$$

1.  $\forall \alpha, MI_{SNR}^{CM}(\alpha) \geq MI_{SNR}^{CM}(0)$
2.  $\exists \alpha, MI_{SNR}^{BICM}(\alpha) < MI_{SNR}^{BICM}(0)$
3.  $\forall \alpha, MI_{SNR}^{CM}(\alpha) \geq MI_{SNR}^{BICM}(\alpha)$

# Meilleur angle de rotation en fonction du SNR

## Angle de rotation optimal en fonction du SNR



$$\alpha_{opt}^{CM}(SNR) = \arg \max_{\alpha[0..90]} \{MI_{SNR}^{CM}(\alpha)\}$$

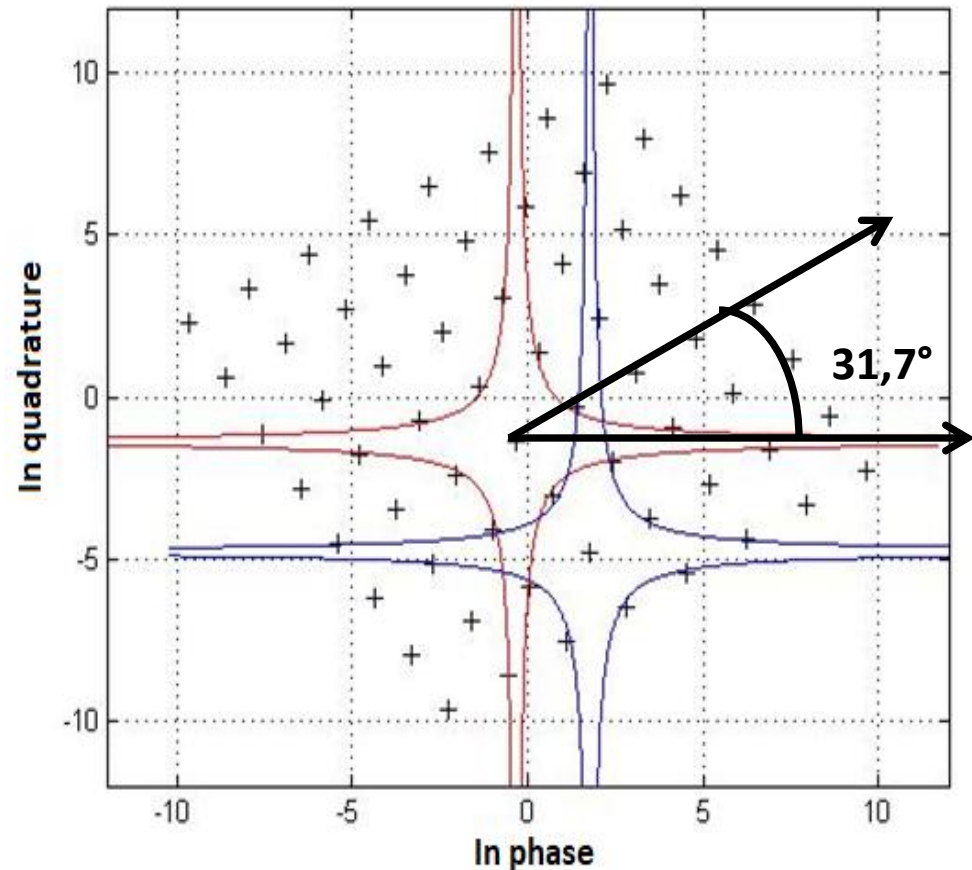
$$\alpha_{opt}^{BICM}(SNR) = \arg \max_{\alpha[0..90]} \{MI_{SNR}^{BICM}(\alpha)\}$$

$$\alpha_{opt}^{CM} \xrightarrow{SNR \rightarrow \infty} 32^\circ$$

# Meilleur angle de rotation en pour les forts SNRs

L'angle de rotation optimal a été déjà proposé pour les forts SNR par Giraud et al. [1].

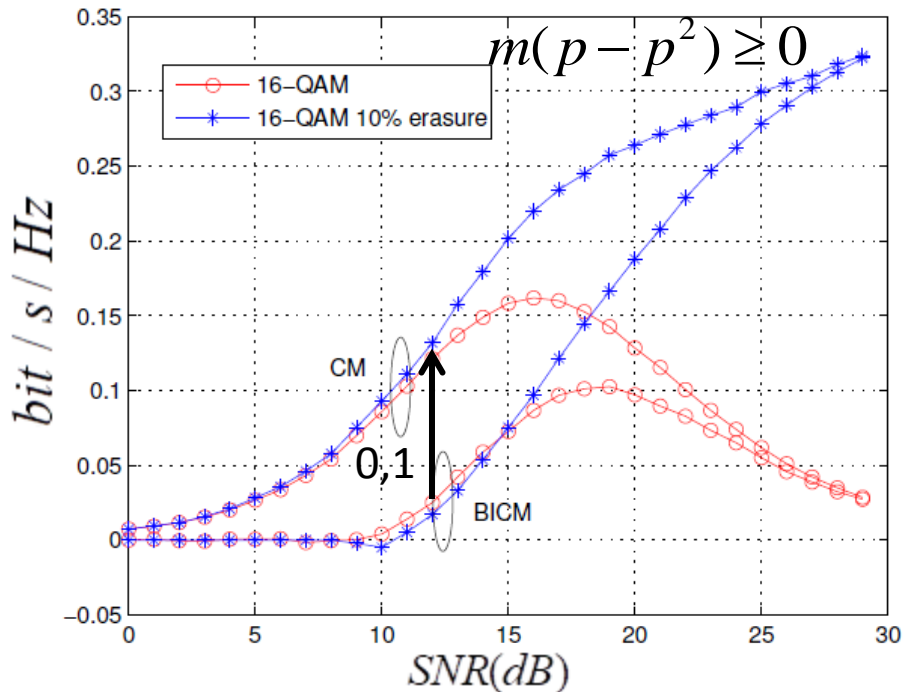
Le principe est de maximiser la valeur de « **Distance produit** »



[1] X. Giraud, K. Boule and J. C. Belfiore, "Constellations Designed for the Rayleigh Fading Channel," IEEE International Symposium on Information Theory, 1993.

# Meilleur angle de rotation en fonction du SNR

## Accroissement des gains de performance en fonction du SNR



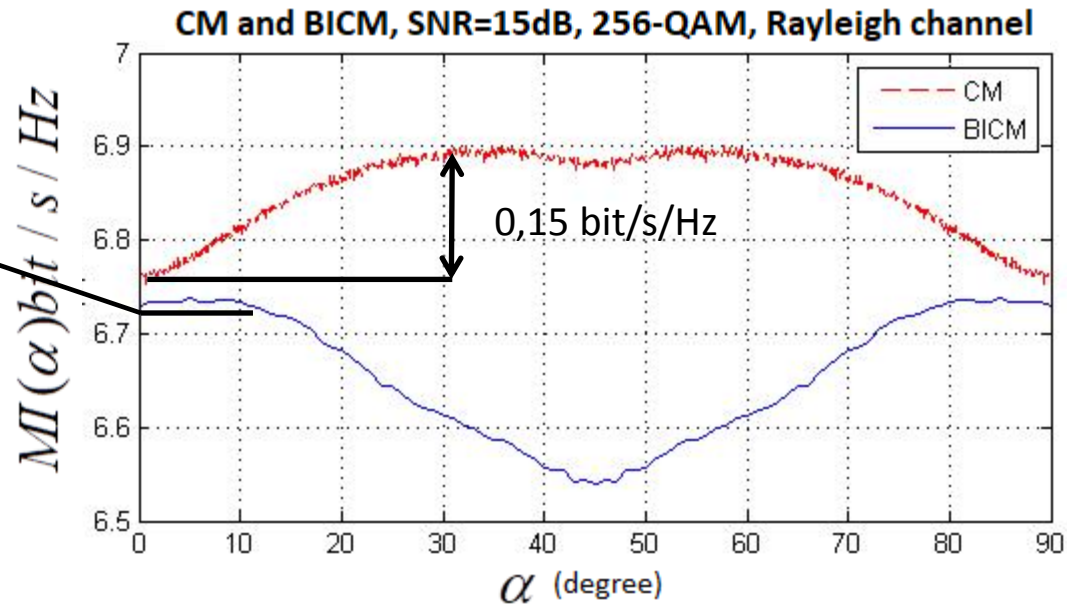
$$MI_{gain}^{CM}(SNR) = MI_{SNR}^{CM}(\alpha_{opt}) - MI_{SNR}^{CM}(0)$$

$$MI_{gain}^{BICM}(SNR) = MI_{SNR}^{BICM}(\alpha_{opt}) - MI_{SNR}^{BICM}(0)$$

- Canal de Rayleigh avec effacement:
- Pas de constellation tournée pertes :  $mp$
- Constellation tournée pertes :  $mp^2$

# L'IM en fonction de l'angle de rotation

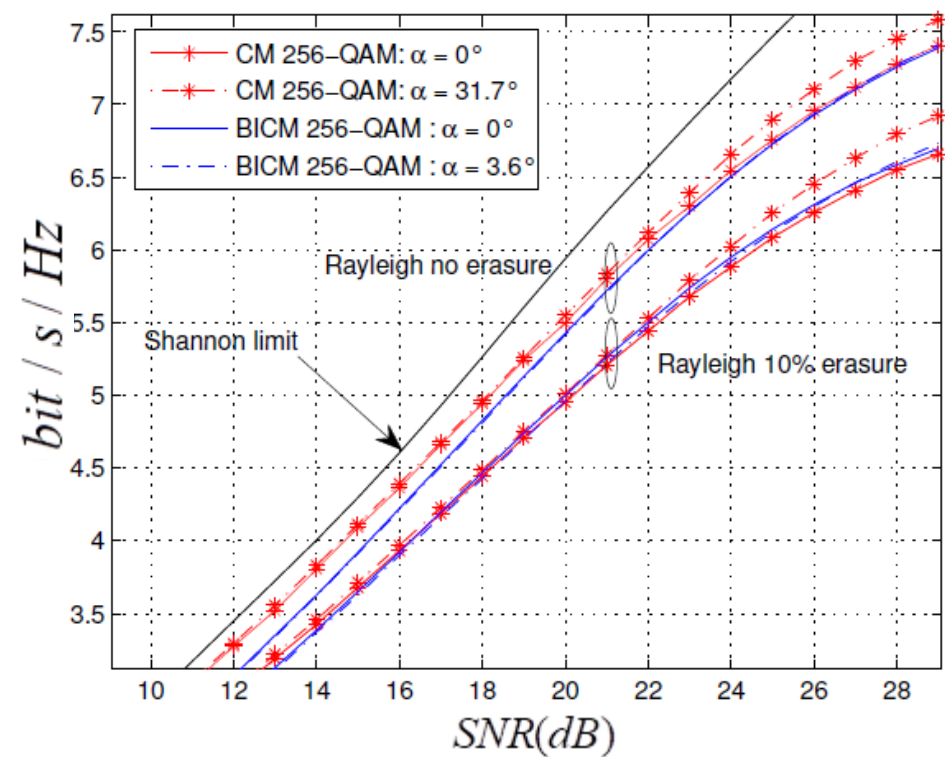
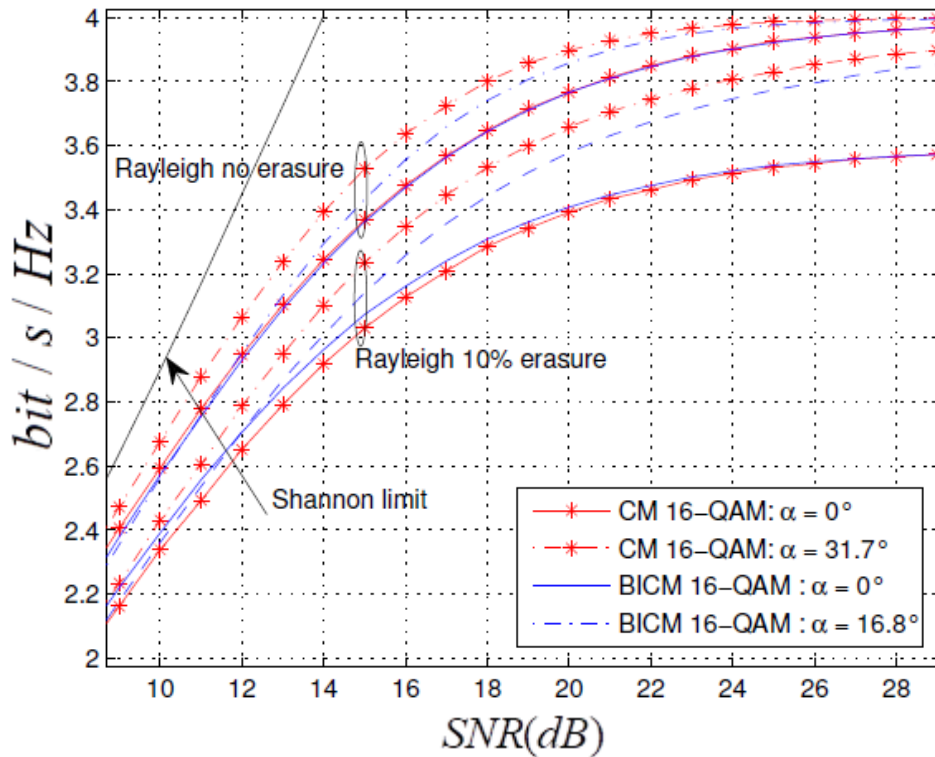
Gain d'IM négligeable pour le BICM



On peut étendre l'étude de l'impact de l'angle de rotation sur l'IM sur différentes constellations e.i. 256-QAM, 64-QAM ect ...

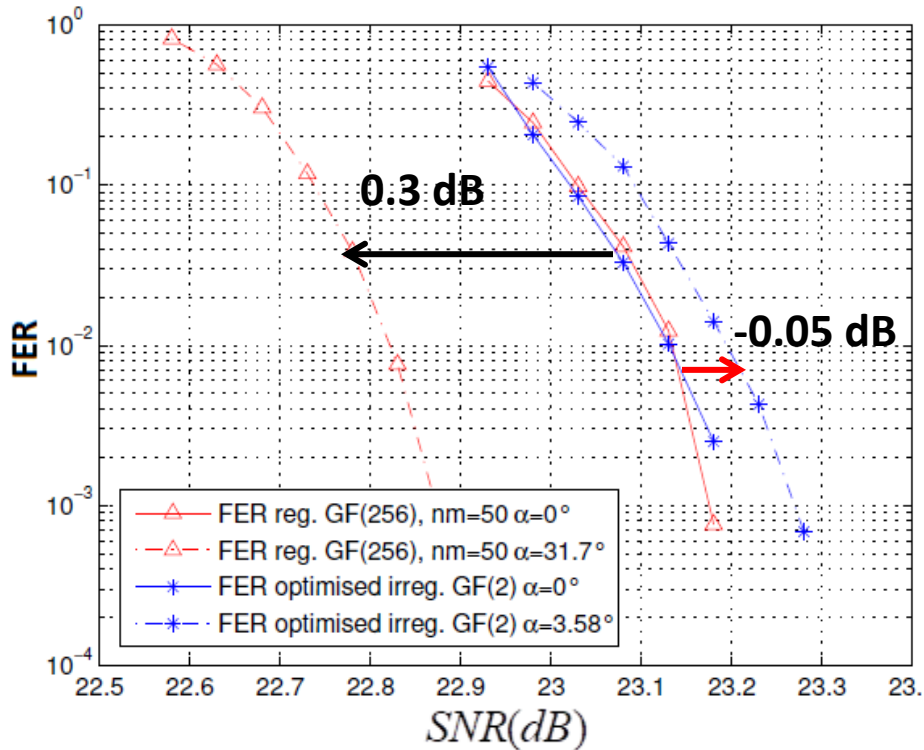
# L'IM en fonction du SNR

- Courbe de l'IM en fonction du SNR. (Il faut **fixer** un angle de rotation pour la CM et pour la BICM). C'est une bonne indication pour les courbes de performances.
- CM :  $31,7^\circ$  (meilleur angle pour les SNR élevés).
- BICM :  $16,8^\circ$ (16-QAM)  $3,6^\circ$ (256-QAM) -> valeurs proposées par la norme DVB-T2.

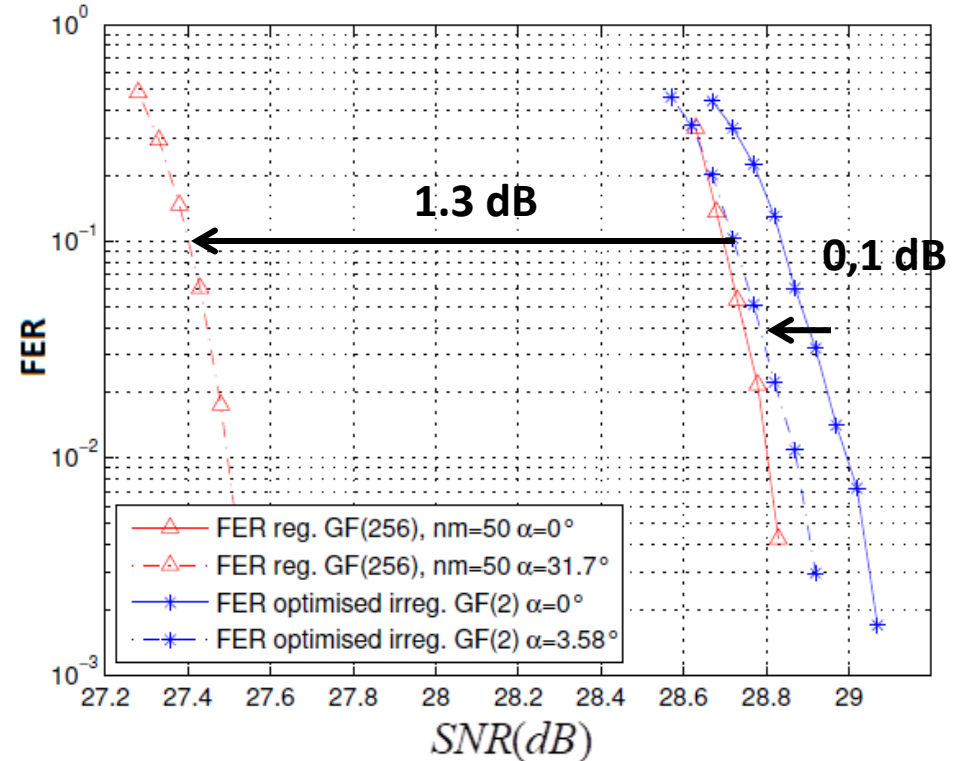


# Courbes de performances

CM vs BICM, trame taille 64000 bits, rendement 3/4, 256-QAM et canal de Rayleigh.



CM vs BICM, trame taille 64000 bits, rendement 9/10, 256-QAM et canal de Rayleigh.



# récapitulatif

- Nous avons réalisé une étude théorique de l'IM pour optimiser l'angle de rotation pour les schémas en CM et en BICM, on peut conclure que :
  1. Il n'y a **pas** d'angle de rotation optimal **absolu** pour la BICM.
  2. L'angle **31,7°** est quasi optimal pour la CM sur une large plage de SNR pour le canal de Rayleigh avec et sans effacement.
  3. L'étude théorique montre que la **CM** présente des performances **supérieures** à celles de la **BICM** en appliquant la **constellation tournée**.
- Avantages des codes LDPC-NB pour les futurs standards de transmissions.

Nous avons valorisé ces travaux par un article de conférence [2] à « *International Conference in Telecommunications* », Grèce.

[2] A. Abdmouleh, E. Boutillon, L. Conde-Canencia, C. A. Nour, and C. Douillard, "On signal space diversity for non binary coded modulation schemes," *IEEE International Conference on Telecommunications (ICT)*, May 2016.

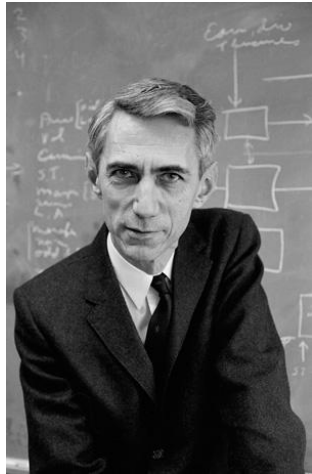


# Plan de la présentation

1. *Contexte de la thèse.*
2. *Optimisation de la diversité de constellation.*
3. **Optimisation conjointe des codes LDPC non binaires et des modulations d'ordre élevé.**
4. *Conclusion et perspectives*

# Evolution vers les codes LDPC non-binaires

C. Shannon



1950

R. G. Gallager



1970

D. Mackay



2000

LDPC codes

Redécouverte des codes LDPC et LDPC-NB

1960

1980

1990

Hamming codes

BCH codes

Convolutional codes

Implémentation pratique des codes

Turbo codes

Les codes LDPC adoptés dans les standards

Claude Shannon

Reed Solomon codes

# Codes LDPC non-binaires

- Les codes LDPC sont des **codes linéaires**.
- Ils sont représentés par une **matrice de parité creuse**.
- Les **symboles** sont définis dans le **corps de Galois**.

## Matrice de parité

- Deux présentations du code :
  - ❖ Représentation **matricielle**.
  - ❖ Représentation en **graphe**.

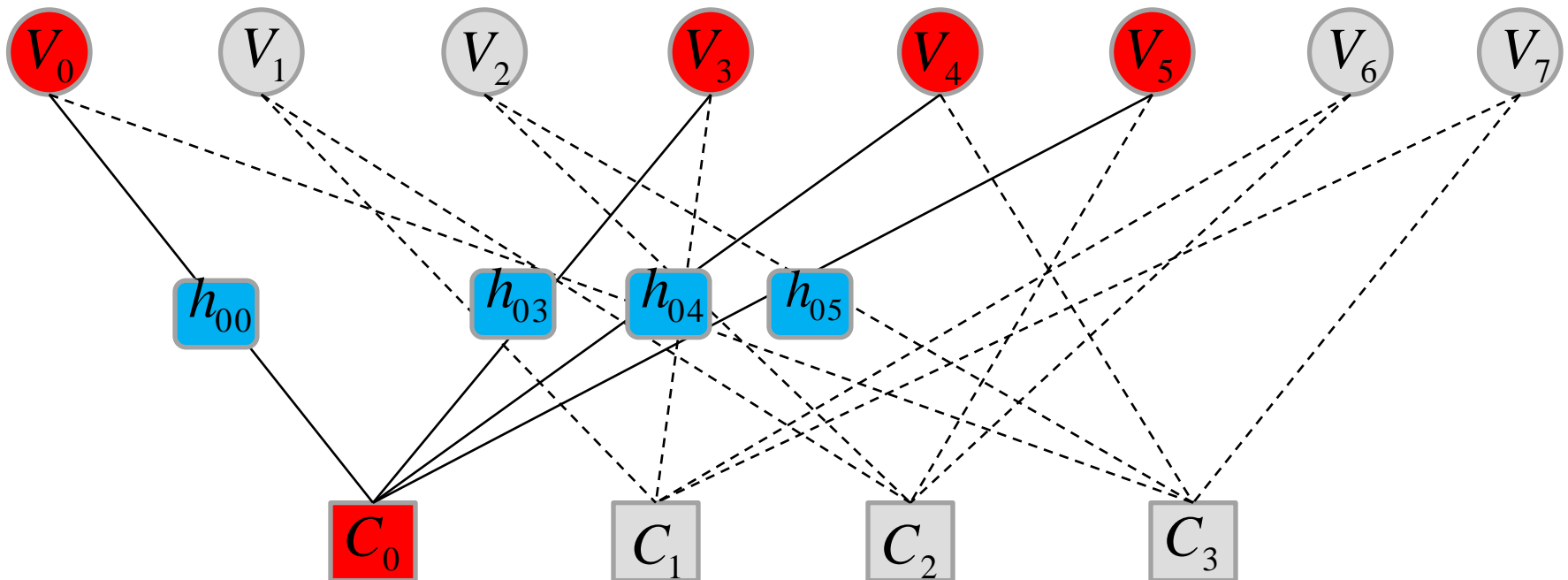
$$h_{00}V_0 + h_{30}V_3 + h_{40}V_4 + h_{50}V_5 = 0$$

$$C_0 \rightarrow \begin{matrix} V_0 & & & V_3 & V_4 & V_4 \\ \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left( \begin{array}{cccccc} h_{00} & 0 & 0 & h_{30} & h_{40} & h_{50} & 0 & 0 \\ 0 & h_{11} & 0 & h_{31} & 0 & 0 & h_{61} & h_{71} \\ 0 & h_{12} & h_{22} & 0 & 0 & h_{42} & h_{62} & 0 \\ h_{03} & 0 & h_{23} & 0 & h_{53} & 0 & 0 & h_{73} \end{array} \right) \end{matrix}$$

# Non-binary LDPC CODES : Tanner Graph

- Les codes LDPC peuvent être représentés par un **Graphe de Tanner**.
- L'intérêt d'une telle représentation : **Décodage itératif**.

Graphe de Tanner





# Optimisation de la matrice de parité (LDPC-NB)

- Optimiser la construction d'une matrice d'encodage LDPC-NB revient à :
  1. Choisir la topologie de la matrice (maximiser le « **Girth** »).
  2. Choisir les coefficients associés à une contrainte de parité de façon à avoir un code local puissant.
  3. Affecter les coefficients aux branches en respectant certaines contraintes.

Etape 2 : Dans le cas du canal Gaussien, il faut maximiser la distance euclidienne entre les mots de code associés à la contrainte de parité.

# Optimisation des coefficients pour la BPSK

Dans l'état de l'art, l'optimisation des coefficients est réalisée pour la modulation BPSK.

- ✓ En BPSK la **distance Euclidienne** et la **distance de Hamming** sont équivalentes.

Distance sur un espace de dimension  $D=2d_c$

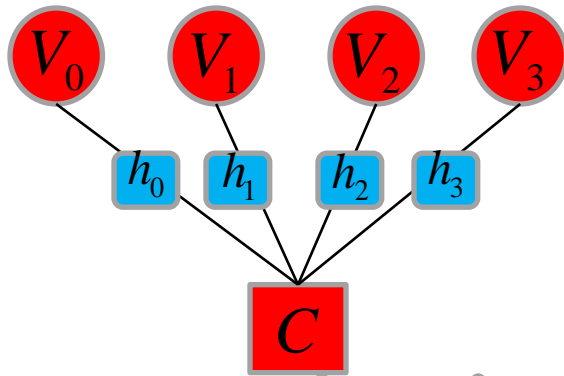
Le nombre de bits différents

- Optimisation basée sur la distance de Hamming.

Poulliat et al [3] ont déterminé les coefficients de l'équation de parité optimaux pour un degré de nœud de parité  $d_c = 4$ .

[3] C. Poulliat, M. Fossorier, and D. Declercq, "Design of  $(2, d_c)$ -LDPC codes over  $GF(q)$  using their binary image, *IEEE Transactions on communications*, vol 56, NO. 10, Oct 2008.

# Optimisation des coefficients pour la BPSK



$$V_0, V_1, V_2, V_3 \in GF(q)^4 = (GF(2)^m)^4$$

Mot de code binaire de taille  $4 \times m$  bits,  $m = \text{Log}_2(q)$

si  $C_1 = (0000, 0100, 0010, 0001)$  est un mot de code  
 $C_0 = (0000, 0000, 0000, 0000)$  mot de code « tout zéro »

3 bits de différence  
 $d_H(C_0, C_1) = 3$

Problème d'optimisation : trouver  $h_0, h_1, h_2, h_3$  tel que :

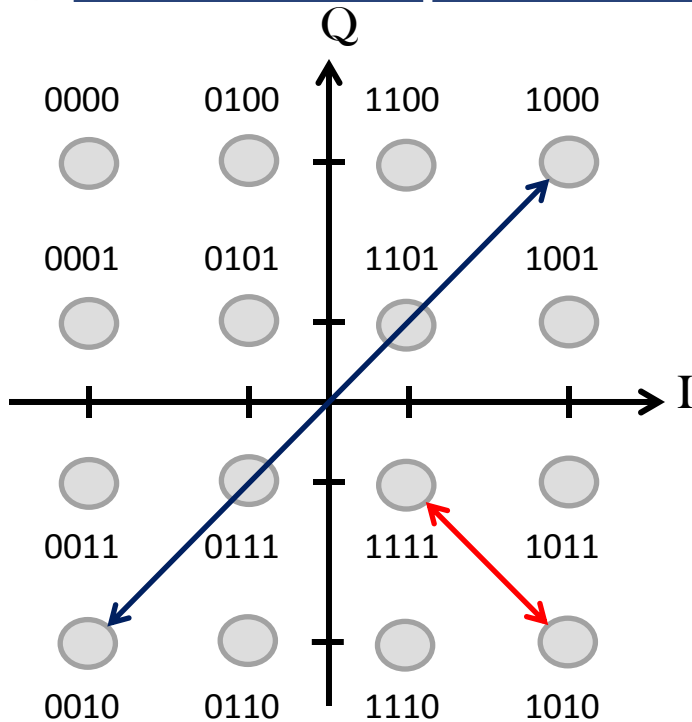
$$d_{\min} = \min_{C \in C^*} d_H(C_0, C) \quad \text{soit maximale}$$

$$S(d_{\min}) = \left| \{ C \in C^* / d_H(C_0, C) = d_{\min} \} \right| \quad \text{soit minimale}$$

Solution dans [3] pour  $d_C = 4$ ,  $GF(64)$  l'ensemble  $\{ \alpha^0, \alpha^9, \alpha^{22}, \alpha^{37} \}$

On a  $d_{\min} = 3$  et  $S(d_{\min}) = 20$

# Distance Euclidienne vs distance de Hamming pour les modulation d'ordre élevé



On considère une modulation avec un **Gray mapping**.

$$d_H(0010, 1000) = 2 \quad D(0010, 1000) = 6\sqrt{2}$$

$$d_H(1111, 1010) = 2 \quad D(1111, 1010) = 2\sqrt{2}$$

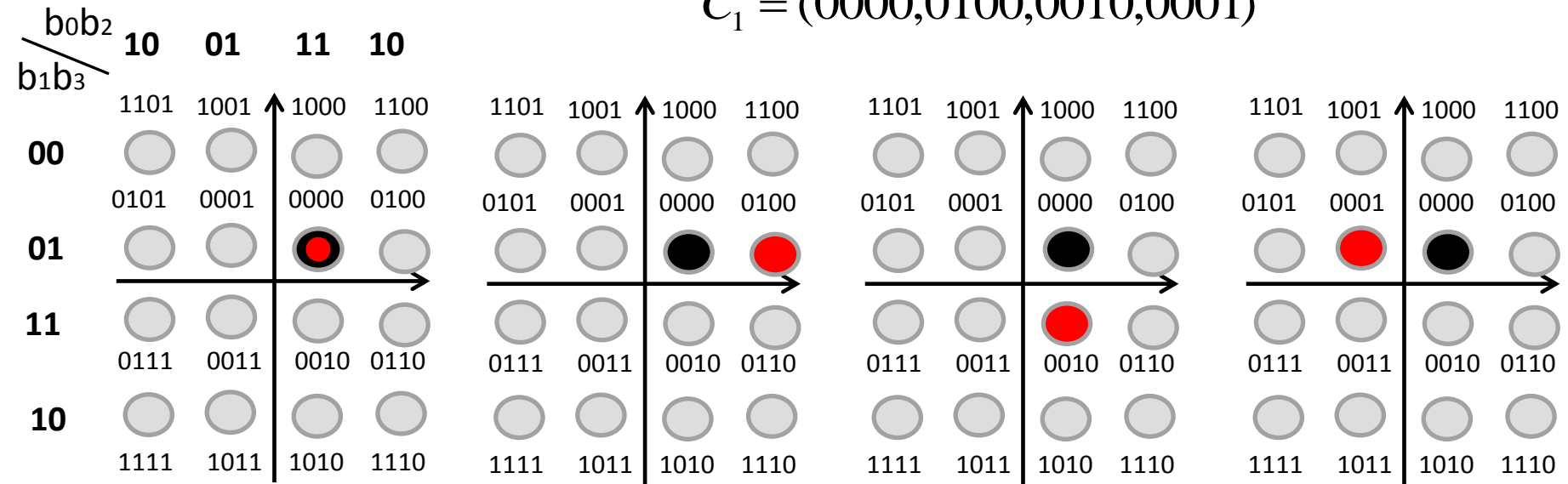
- ❖ L'équivalence entre distance **Euclidienne** et distance de **Hamming** n'est **pas vérifiée** pour les modulations d'ordre élevé.
- Il faut utiliser les **distance Euclidienne** pour choisir les coefficients non nuls.

# Relation entre distance Euclidienne et mapping

## Mapping de Gray $\Pi 0$

$$C_0 = (0000, 0000, 0000, 0000)$$

$$C_1 = (0000, 0100, 0010, 0001)$$



$$D(C_0^0, C_1^0) = 0$$

$$D(C_0^1, C_1^1) = 2$$

$$D(C_0^2, C_1^2) = 2$$

$$D(C_0^3, C_1^3) = 2$$

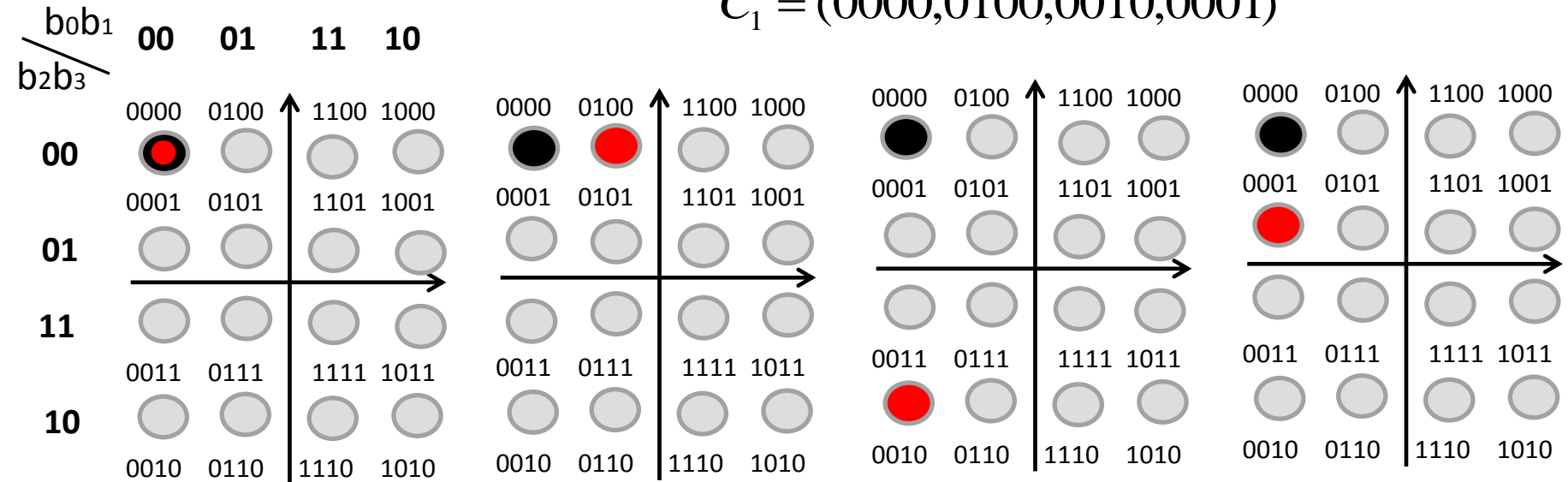
$$D(C_0, C_1)^2 = \sum_{k=0}^3 D(C_0^k, C_1^k)^2 = 12 \Rightarrow D(C_0, C_1) = 2\sqrt{3}$$

# Relation entre distance Euclidienne et mapping

## Mapping de Gray $\Pi$ 1

$$C_0 = (0000, 0000, 0000, 0000)$$

$$C_1 = (0000, 0100, 0010, 0001)$$



$$D(C_0, C_1)^2 = \sum_{k=0}^3 D(C_0^k, C_1^k)^2 = 44 \Rightarrow D(C_0, C_1) = \boxed{2\sqrt{11} \neq 2\sqrt{3}}$$

La **distance Euclidienne** entre les mots de codes **dépend** du **mapping de utilisé**.

# Méthode d'optimisation

1. Utiliser un mapping de Gray au niveau de la constellation pour **garantir** des propriétés entre distance de Hamming et distance Euclidienne :  $d_H(C_0, C_1) \geq 3 \Rightarrow D(C_0, C_1) \geq 2\sqrt{3}$
2. Pour un couple (**coefficients - Gray mapping**) donnée, définition d'une méthode rapide de détermination de  $S(2\sqrt{3})$  , le nombre de couples de mots de code à une distance de  $2\sqrt{3}$  les uns aux autres.
3. Enumération d'une classe de codage de Gray par permutation des bits et détermination du couple (**codage de Gray - coefficients**) qui minimisent  $S(2\sqrt{3})$ .

# Exemples de spectres de distances

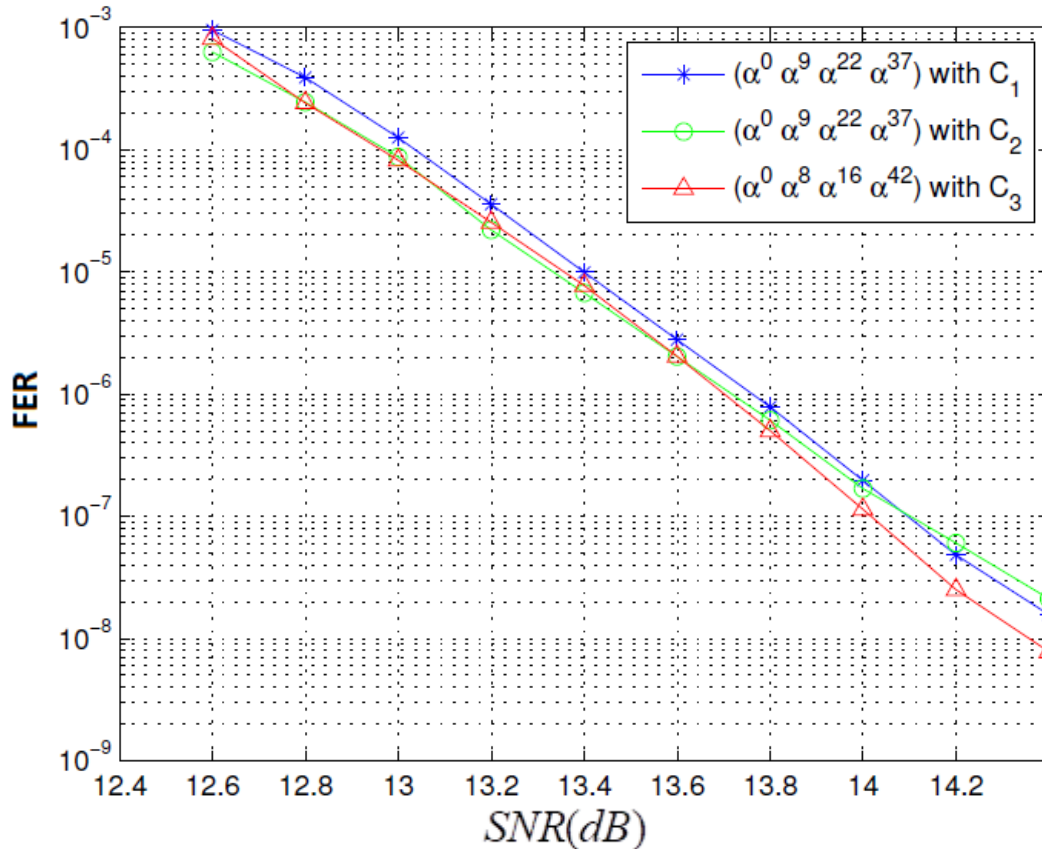
Nous avons réalisé une étude exhaustive sur les couples (Gray mapping – coefficients) d’une équation de parité. Nous présentons trois combinaisons comme suit :

1. Coefficients + Gray mapping de l’état de l’art. [1] et (DVB-T2).
2. Gray mapping qui maximise  $S(2\sqrt{3})$  , associé aux coefficients de l’état de l’art [1].
3. La meilleure combinaison entre Gray mapping et coefficients trouvée.

Code	Mapping $\sigma$	Coeff.	$S_{\pi,c}(2\sqrt{3})$		$S_{\pi,c}(4)$	
$(\mathcal{C}, \pi)_0$	{5, 4, 3, 2, 1, 0}	$\alpha^{\{0,9,22,37\}}$	516,096		3,868,672	
$(\mathcal{C}, \pi)_1$	{3, 0, 2, 1, 5, 4}	$\alpha^{\{0,9,22,37\}}$	909,312	+76%	2,910,208	-24%
$(\mathcal{C}, \pi)_2$	{4, 2, 1, 0, 5, 3}	$\alpha^{\{0,8,16,42\}}$	385,024	-25%	3,499,008	-10%

# Résultats de simulation

- Nous avons réalisé la construction de deux matrices d'encodage de taille 48 et rendement 1/2 utilisant les deux quadruplets de coefficients  $\{\alpha^0 \alpha^9 \alpha^{22} \alpha^{37}\}$  et  $\{\alpha^0 \alpha^8 \alpha^{16} \alpha^{42}\}$ .



- Les résultats de simulation comparent les trois cas de figure que nous avons choisis.
- Un gain de performance qui atteint 0,2 dB peut être obtenu.
- Les gains obtenus n'ajoutent pas de complexité au système de transmission.



# Récapitulatif

**Nous avons réalisé une optimisation conjointe des codes LDPC-NB et des modulations.**

- **Meilleur schéma en modulation codée est proposé. Des gains de performances sont obtenus sans ajout de complexité.**

**Nous avons valorisé ces travaux par un article de conférence à ISTC [4], et une demande de Brevet en collaboration avec France Brevet [5].**

**[4] A. Abdmouleh, E. Boutillon, L. Conde-Canencia, C. A. Nour, and C. Douillard, “A new approach to optimise Non-Binary LDPC codes for coded modulations,”** *IEEE International Symposium on turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC)*, pp. 295–299, Sep 2016.

**[5] A. Abdmouleh, E. Boutillon, Methods and devices for generating optimized coded modulations,”** *Numéro de Demande : EP16306110.4, Déposant : UNIVERSITE DE BRETAGNE SUD*, Sep 2016.



# Plan de la présentation

- 1. Contexte de la thèse.*
- 2. Optimisation de la diversité de constellation.*
- 3. Optimisation conjointe des codes LDPC non binaires et des modulations d'ordre élevé.*
- 4. Conclusion et perspectives**

## Optimisation de la constellation tournée:

- ✓ Optimisation basée sur une analyse théorique de l'IM pour les schémas en CM et en BICM.
- Des **avantages théoriques** observés pour le schéma en CM par rapport au schéma en BICM.
- Des **gains en performances** importants pour le schéma en CM.

## Optimisation conjointe des codes LDPC-NB et des modulations-NB:

- ✓ Optimisation conjointe des codes LDPC-NB et des modulations, basée sur une maximisation de la distance Euclidienne : **Méthode innovante**.
- **Amélioration** du schéma en modulation codée.
- Des **gains** de performances sont obtenus (**0.2dB**) sans ajout de complexité.



# Perspectives

## Optimisation de la technique de la constellation tournée :

- ✓ La méthode d'optimisation proposée peut être généralisée à d'autres types de **modulations** (M-QAM et en q-PSK), **rendements**, et d'autres **corps de Galois**.
- ❖ Application sur les transmissions en **n-dimension**.

## Optimisation conjointe des codes LDPC-NB et des modulations-NB:

- ✓ La méthode d'optimisation proposée peu être généralisée à d'autres rendements, longueurs de codes, types de modulations et **codes non-binaires** (turbo codes NB).
- ❖ Considérer des LDPC-NB définis sur un **anneau**. Des résultats **préliminaires** démontrent qu'on peut atteindre une **distance Euclidienne** minimale de **4**.



# Merci de votre attention.